

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	15
<b>ΜΕΡΟΣ Ι</b>	<b>ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΟΥΣ</b>	19
<b>Κεφάλαιο 1</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</b>	21
	1. Εισαγωγή	22
	2. Συναρτήσεις, αντιστοιχίες	22
	3. Μερικές συναρτήσεις και ισοσταθμικές καμπύλες	33
	4. Όρια και συνέχεια συναρτήσεις $\mathbb{R}^n$	37
<b>Κεφάλαιο 2</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΟΣΥΝΟΛΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ <math>\mathbb{R}^n</math></b>	45
	1. Εισαγωγή	46
	2. Εσωτερικό γινόμενο, απόσταση και γωνία μεταξύ διανυσμάτων	46
	3. Γειτνιάσεις, εσωτερικά σημεία, συνοριακά σημεία και σημεία συσσώρευσης	51
	4. Ανοικτά, κλειστά και φραγμένα σύνολα	54
	5. Ακολουθίες σημείων του $\mathbb{R}^n$	55
	6. Συμπαγή σύνολα, κυρτά σύνολα και σταθερά σημεία	58
<b>Κεφάλαιο 3</b>	<b>ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</b>	67
	1. Εισαγωγή	68
	2. Η μερική παράγωγος και το διάνυσμα κλίσης	68
	3. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	74
	4. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης	77
	5. Γραμμικές και πολυωνυμικές προσεγγίσεις	80
	6. Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων (Ο αλυσωτός κανόνας)	90
	7. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση	94

<b>Κεφάλαιο 4</b>	<b>ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΟΥΣ</b>	103
	1. Εισαγωγή	104
	2. Παράγωγοι πλεγμένης συνάρτησης	108
	3. Συστήματα πλεγμένων συναρτήσεων και οι παράγωγοί τους	116
	4. Η αντίστροφη μιας διανυσματικής συνάρτησης και η παράγωγός της	124
<b>Κεφάλαιο 5</b>	<b>ΟΙ ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ</b>	133
	1. Εισαγωγή	134
	2. Η έννοια του μαθηματικού οικονομικού υποδείγματος	134
	3. Συγκριτική στατική ανάλυση σε απλά οικονομικά μοντέλα	139
	4. Ένα γενικό πλαίσιο συγκριτικής στατικής οικονομικής ανάλυσης	144
	5. Ποιοτική ανάλυση και η υπολογιστική πολυπλοκότητά της	147
<b>ΜΕΡΟΣ II</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</b>	157
<b>Κεφάλαιο 6</b>	<b>ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</b>	159
	1. Εισαγωγή	160
	2. Επίλυση της $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$	166
	3. Διαγωνιοποίηση μιας τετραγωνικής μήτρας	175
	4. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα της δύναμης $\mathbf{A}^k$	180
	5. Εφαρμογές της διαγωνιοποίησης	181
	6. Μιγαδικές ιδιοτιμές και μιγαδικά ιδιοδιανύσματα	190
<b>Κεφάλαιο 7</b>	<b>ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ</b>	197
	1. Εισαγωγή	198
	2. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα μιας συμμετρικής μήτρας	198
	3. Διαγωνιοποίηση μιας συμμετρικής μήτρας	201
	4. Τετραγωνικές μορφές	204
	5. Οριστικότητα τετραγωνικών μορφών	208

<b>ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ</b>	<b>ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</b>	219
<b>Κεφάλαιο 8</b>	<b>ΜΗ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</b>	221
	1. Εισαγωγή	222
	2. Ύπαρξη και μοναδικότητα βέλτιστων σημείων	226
	3. Συνθήκες πρώτης τάξης	228
	4. Συνθήκες δεύτερης τάξης	232
	5. Συγκριτική στατική στο μοντέλο μη δεσμευμένης βελτιστοποίησης	241
<b>Κεφάλαιο 9</b>	<b>ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΗ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</b>	249
	1. Εισαγωγή	250
	2. Μεγιστοποίηση κερδών σε συνθήκες ατελούς ανταγωνισμού	250
	3. Μεγιστοποίηση κερδών σε συνθήκες τέλει ανταγωνισμού με γενική συνάρτηση παραγωγής	252
	4. Μεγιστοποίηση κερδών με πολλές συναρτήσεις παραγωγής	260
	5. Μεγιστοποίηση κερδών με πολλές συναρτήσεις ζήτησης	262
<b>Κεφάλαιο 10</b>	<b>ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΕΞΙΣΩΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	269
	1. Εισαγωγή	270
	2. Συνθήκες πρώτης τάξης	271
	3. Γενίκευση σε $m > 1$ περιορισμούς και $n > 2$ μεταβλητές	283
	4. Γενικευμένες συνθήκες πρώτης τάξης	292
	5. Συνθήκες δεύτερης τάξης	296
	6. Συγκριτική στατική ανάλυση	301
<b>Κεφάλαιο 11</b>	<b>ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΕΞΙΣΩΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	307
	1. Εισαγωγή	308
	2. Οικονομική ερμηνεία των πολλαπλασιαστών Λαγκράνζ	308
	3. Μεγιστοποίηση χρησιμότητας	313
	4. Μεγιστοποίηση χρησιμότητας με εισοδηματικό και χρονικό περιορισμό	319

	5. Ελαχιστοποίηση καταναλωτικής δαπάνης	321
	6. Βέλτιστα σημεία κατά Παρέτο	322
<b>Κεφάλαιο 12</b>	<b>ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΑΝΙΣΩΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	<b>325</b>
	1. Εισαγωγή	326
	2. Η χρήση εξισωτικών αντί ανισωτικών περιορισμών μπορεί να επιφέρει απώλεια προσδιορισμού πραγματικών βέλτιστων σημείων	327
	3. Συνθήκες πρώτης τάξης ή συνθήκες ΚΚΤ	330
	4. Ο αλγόριθμος ΚΚΤ	339
	5. Συνθήκες πρώτης τάξης για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης	348
	6. Οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας των μεταβλητών (συνθήκες Kuhn – Tucker)	350
	7. Οι συνθήκες ΚΤ σε απλά οικονομικά υποδείγματα	356
<b>Κεφάλαιο 13</b>	<b>ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΒΛΗΜΑΤΟΣ</b>	<b>365</b>
	1. Εισαγωγή	366
	2. Συνάρτηση αξίας και το θεώρημα του περιβλήματος σε μη δεσμευμένη βελτιστοποίηση	366
	3. Συναρτήσεις αξίας και το θεώρημα του περιβλήματος σε δεσμευμένη βελτιστοποίηση	371
	4. Δυικότητα και το θεώρημα του περιβλήματος	376
	5. Βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες συναρτήσεις κόστους	383
<b>Κεφάλαιο 14</b>	<b>ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΑΙ ΟΜΟΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</b>	<b>387</b>
	1. Εισαγωγή	388
	2. Ορισμός, γεωμετρική ερμηνεία και οικονομικά υποδείγματα	389
	3. Ιδιότητες ομογενών συναρτήσεων	395
	4. Το θεώρημα του Euler και οι οικονομικές του εφαρμογές	401
	5. Ομογενοποίηση συνάρτησης	406
	6. Συναρτήσεις Cobb-Douglas	407
	7. Συναρτήσεις σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης – Συναρτήσεις C.E.S.	412
	8. Συναρτήσεις μεταβλητής ελαστικότητας υποκατάστασης ή συναρτήσεις V.E.S.	416
	9. Ομοθετικές συναρτήσεις	418

<b>Κεφάλαιο 15</b>	<b>ΚΟΙΛΕΣ (ΚΥΡΤΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ</b>	423
	1. Εισαγωγή	424
	2. Κοίλες συναρτήσεις σε όρους χορδών και κυρτών συνόλων	425
	3. Κοίλες συναρτήσεις σε όρους παραγώγων	430
	4. Ιδιότητες κοίλων συναρτήσεων	437
	5. Οιονεί κοίλες και οιονεί κυρτές συναρτήσεις	443
	6. Ψευδοκοίλες συναρτήσεις	451
	7. Οιονεί κοίλος προγραμματισμός	453
<b>ΜΕΡΟΣ IV</b>	<b>ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</b>	459
<b>Κεφάλαιο 16</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ</b>	461
	1. Εισαγωγή	462
	2. Η γενική λύση και το πρόβλημα των αρχικών τιμών	468
	3. Σταθερά σημεία και η ευστάθειά τους	473
	4. Απλά παραδείγματα εξισώσεων διαφορών	477
<b>Κεφάλαιο 17</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	487
	1. Εισαγωγή	488
	2. Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης	488
	3. Σταθερά σημεία και η ευστάθειά τους	491
	4. Οικονομικές εφαρμογές των εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές	496
<b>Κεφάλαιο 18</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	513
	1. Εισαγωγή	514
	2. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης	514
	3. Μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης	525
	4. Σταθερά σημεία και η ευστάθειά τους	529
	5. Εφαρμογές των εξισώσεων διαφορών δεύτερης τάξης σε δυναμικά οικονομικά μοντέλα	536

<b>Κεφάλαιο 19</b>	<b>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ</b>	543
	1. Εισαγωγή	544
	2. Επίλυση με την έμμεση μέθοδο	548
	3. Επίλυση με την άμεση μέθοδο	551
<b>Κεφάλαιο 20</b>	<b>ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	559
	1. Εισαγωγή	560
	2. Προσδιορισμός χρονικών τροχιών	562
	3. Σταθερά σημεία και η ευστάθειά τους	568
	4. Περιοδικά σημεία και η ευστάθειά τους	578
<b>Κεφάλαιο 21</b>	<b>ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΧΑΟΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ</b>	591
	1. Εισαγωγή	592
	2. Οι διακλαδώσεις του σημείου επαφής και του διπλασιασμού της περιόδου	593
	3. Η μετάβαση από τη διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου στο χάος	601
	4. Χαοτική δυναμική	605
	5. Τα αποτελέσματα της εργασίας των Li και Yorke	611
	6. Ο εκθέτης Lyapunov	612
	7. Χάος και παράξενοι ελκυστές	614
	8. Χάος στις προβλέψεις και στην οικονομική επιστήμη	615
<b>Κεφάλαιο 22</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	621
	1. Εισαγωγή	622
	2. Από τις εξισώσεις διαφορών στις διαφορικές εξισώσεις	622
	3. Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων	623
	4. Οι λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης	626
	5. Τα προβλήματα των αρχικών και των συνοριακών τιμών	629
	6. Σταθερά σημεία, λύσεις ισορροπίας, ευστάθεια	634
	7. Αναλυτική, ποιοτική και αριθμητική μέθοδος	638
	8. Μοντελοποίηση με διαφορικές εξισώσεις	639

<b>Κεφάλαιο 23</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	647
	1. Εισαγωγή	648
	2. Η γενική λύση της αυτόνομης εξίσωσης	649
	3. Η γενική λύση της μη αυτόνομης εξίσωσης	653
	4. Έλεγχος της ευστάθειας σταθερών σημείων	661
	5. Οικονομικές εφαρμογές	663
<b>Κεφάλαιο 24</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	673
	1. Εισαγωγή	674
	2. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης	675
	3. Μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης	686
	4. Έλεγχος της ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας	693
	5. Γραμμικές εξισώσεις $n$ -οστής τάξης	697
<b>Κεφάλαιο 25</b>	<b>ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	705
	1. Εισαγωγή	706
	2. Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αναλυτικά επιλύσιμες	707
	3. Ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων ενός προβλήματος αρχικών τιμών	713
	4. Έλεγχος της ευστάθειας με ποιοτική ανάλυση	718
	5. Η μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων με ποιοτική ανάλυση	727
	6. Δύο απλά οικονομικά υποδείγματα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων	737
	7. Συγκριτική στατική, ευστάθεια και η αρχή της αντιστοιχίας	744
<b>Κεφάλαιο 26</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	749
	1. Εισαγωγή	750
	2. Η βασική μέθοδος Euler	751
	3. Μια βελτιωμένη μέθοδος Euler	754
	4. Η οικογένεια των μεθόδων Euler	757
	5. Η μέθοδος Runge – Kutta	759

<b>Κεφάλαιο 27</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	763
	1. Εισαγωγή	764
	2. Από μια διαφορική εξίσωση $n$ -οστής τάξης σε ένα σύστημα $n$ διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης και αντιστρόφως	769
	3. Λύσεις ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων και η γεωμετρία τους	773
	4. Λύσεις ισορροπίας και ευστάθεια	780
<b>Κεφάλαιο 28</b>	<b>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>	787
	1. Εισαγωγή	788
	2. Η γενική λύση του ομογενούς συστήματος	790
	3. Η γενική λύση με διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές	794
	4. Η γενική λύση με επαναλαμβανόμενες πραγματικές ιδιοτιμές	801
	5. Η γενική λύση με μιγαδικές ιδιοτιμές	805
	6. Μια λύση του μη ομογενούς συστήματος	807
	7. Ανάλυση ευστάθειας	809
<b>Κεφάλαιο 29</b>	<b>ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	823
	1. Εισαγωγή	824
	2. Μη γραμμικά συστήματα που έχουν αναλυτικές λύσεις	824
	3. Ποιοτική ανάλυση με τη μέθοδο των μηδενοκλίσεων	826
	4. Ποιοτική ανάλυση με γραμμικοποίηση στα σταθερά σημεία	837
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	845