

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ	17
-------------	----

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

### ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	25
------------	----

#### Οι φυσικοί αριθμοί και η αναπαράστασή τους

• Οι φυσικοί αριθμοί	26
• Η σχέση της ισότητας και της ανισότητας των φυσικών αριθμών	27
• Η αναπαράσταση των φυσικών αριθμών	29
• Η γραπτή συμβολική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών	30
• Το ρωμαϊκό σύστημα αναπαράστασης	31
• Το ινδοαραβικό σύστημα αναπαράστασης	34
• Η αριθμογραμμή	40
• Ασκήσεις και δραστηριότητες	42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	45
------------	----

#### Οι πράξεις μεταξύ των φυσικών αριθμών

• Πρόσθεση	46
• Αφαίρεση	48
• Πολλαπλασιασμός	49
• Διαίρεση	51

• Διαίρεση μέτρησης	54
• Διαίρεση μερισμού	54
• Ύψωση σε δύναμη	56
• Εξισώσεις πρώτου βαθμού στο αριθμητικό σύστημα των φυσικών αριθμών	57
• Ασκήσεις	58

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3** 61

#### **Αλγόριθμοι για τις τέσσερις πράξεις**

• Πρόσθεση	62
• Αφαίρεση	63
• Πολλαπλασιασμός	65
• Διαίρεση	66
• Οι πράξεις σε συστήματα με αξία θέσης αλλά με βάση $\beta \neq 10$	68
• Ασκήσεις	70

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4** 73

#### **Δύο βασικές ιδιότητες του συστήματος των φυσικών αριθμών**

• Μοτίβα ή πρότυπα	74
• Αρχή της μαθηματικής επαγωγής	77
• Αρχή του μικρότερου στοιχείου	77
• Το άθροισμα των $n$ διαδοχικών αριθμών $1, 2, \dots, n$	79
• Το άθροισμα των $n$ διαδοχικών τετραγώνων $1, 4, \dots, n^2$	81
• Συνδυαστική	81
• Ασκήσεις και δραστηριότητες	87

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b>	89
<b>Διαιρετότητα</b>	
• Περισσότερα για το σύστημα των φυσικών αριθμών	90
• Ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών	98
• Μορφή και πλήθος των διαιρετών ενός αριθμού	106
• Κριτήρια διαιρετότητας	107
• Ασκήσεις και δραστηριότητες	111
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</b>	115
<b>Κλασματικές μονάδες και κλασματικοί αριθμοί</b>	
• Οι κλασματικοί αριθμοί	116
• Κλασματικές μονάδες, κλασματικοί αριθμοί και κλάσματα	117
• Σύγκριση κλασματικών αριθμών	119
• Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο άνισους κλασματικούς αριθμούς;	124
• Τι μετρά ένας κλασματικός αριθμός;	126
• Ασκήσεις	130
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7</b>	131
<b>Πράξεις μεταξύ των κλασματικών αριθμών</b>	
• Πρόσθεση	132
• Αφαίρεση	134
• Πολλαπλασιασμός	135
• Διαίρεση	140
• Οι πράξεις με κλασματικούς αριθμούς στους αρχαίους Αιγυπτίους	143
• Εξισώσεις πρώτου βαθμού με κλασματικούς συντελεστές	143
• Ασκήσεις	145

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8</b>	147
<b>Κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί</b>	
• Δεκαδική αναπαράσταση των κλασματικών αριθμών	148
• Οι δεκαδικοί αριθμοί	155
• Μεγέθη που δεν μετριοούνται με κλασματικούς αριθμούς	160
• Ασκήσεις	163
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9</b>	165
<b>Επεκτάσεις του συστήματος των φυσικών αριθμών</b>	
• Η αρνητική ακέραια μονάδα και οι ακέραιοι αριθμοί	166
• Πράξεις μεταξύ των ακεραίων αριθμών	167
• Η διάταξη των ακεραίων	169
• Επεκτάσεις του συστήματος των φυσικών αριθμών	170
• Διοφαντικές εξισώσεις	174
• Εφαρμογή στη στατιστική ανάλυση	176
• Ασκήσεις	181
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ</b>	183
<b>Προβλήματα πρακτικής αριθμητικής</b>	
• Το πρόβλημα των δίποδων και τετράποδων ζώων	184
• Το πρόβλημα των 100 πουλιών	185
• Η μέθοδος Regula Falsi	185
• Το πρόβλημα των κρουνών	186
• Το πρόβλημα των αγγελιοφόρων	187
• Ποσοστά, τόκοι, αναλογίες, ποσά ευθέως και αντιστρόφως ανάλογα	188
• Ασκήσεις και δραστηριότητες	193

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΣΥΝΟΛΑ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 199

##### Σύνολα και πράξεις μεταξύ συνόλων

- Σύνολα και στοιχεία συνόλων 200
- Υποσύνολα 202
- Πράξεις μεταξύ συνόλων 204
- Οι πληθικοί αριθμοί της ένωσης, της τομής, της διαφοράς 209
- Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου 210
- Διατεταγμένα ζεύγη και διατεταγμένες  $n$ -άδες πραγμάτων 211
- Ο καρτεσιανός πολλαπλασιασμός 212
- Ασκήσεις και δραστηριότητες 213

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 215

##### Σχέσεις και συναρτήσεις

- Συναρτήσεις 216
- Πληθικοί αριθμοί διαφόρων συνόλων συναρτήσεων  $f: A \rightarrow B$  222
- Δύο βασικές σχέσεις: η σχέση διάταξης και η σχέση ισοδυναμίας 229
- Μία συνολοθεωρητική προσέγγιση στο σύστημα των φυσικών αριθμών 233
- Ασκήσεις και δραστηριότητες 238

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 239

##### Απειροσύνολα

- Η έννοια του απειροσυνόλου 240

- Σύγκριση απειροσυνόλων 241
- Ασκήσεις και δραστηριότητες 246

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14** 247

### **Σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των πιθανοτήτων**

- Πιθανότητα 248
- Πιθανότητα υπό συνθήκη 249
- Εφαρμογή 251
- Ασκήσεις 253

## **ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ**

### **ΣΧΗΜΑΤΑ**

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15** 257

### **Σημεία, γραμμές, γωνίες και σχήματα στο επίπεδο**

- Σημεία και γραμμές 258
- Κύκλος 259
- Γωνίες 261
- Επίπεδα σχήματα 265
- Η ευκλείδεια επιπεδομετρία 266

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16** 269

### **Το τρίγωνο**

- Τα τρίγωνα ως προς τις πλευρές τους 270
- Ίσα τρίγωνα 271
- Τα τρίγωνα ως προς τις γωνίες τους 274
- Σχέση γωνιών και πλευρών σε ένα τρίγωνο 276

- Πέντε κατασκευές και δύο γεωμετρικοί τόποι 277
- Χαρακτηριστικές ευθείες και σημεία τριγώνων 282
- Ασκήσεις 287

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17** 289

### **Παραλληλία**

- Παράλληλες ευθείες και Πέμπτο Αίτημα 290
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου 292
- Ασκήσεις 294

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18** 295

### **Τετράπλευρα και πολύγωνα**

- Τετράπλευρα 296
- Πολύγωνα 302
- Ασκήσεις 305

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19** 307

### **Εμβαδά**

- Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των παράλληλων ευθειών 308
- Το πυθαγόρειο θεώρημα 309
- Μοντέρνα μετρική παρέκβαση 313
- Πυθαγόρειες τριάδες 318
- Ασκήσεις και δραστηριότητες 319

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20</b>	321
<b>Ομοιότητα τριγώνων</b>	
• Όμοια τρίγωνα	322
• Πώς μέτρησε ο Θαλής το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα;	326
• Το θεώρημα του Θαλή	328
• Μια άλλη απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος	328
• Η χρυσή τομή	329
• Μη ευκλείδεια τριγωνομετρική παρέκβαση	330
• Ασκήσεις	332
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21</b>	333
<b>Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός τριγώνου</b>	
• Μια ιδιότητα της διχοτόμου γωνίας τριγώνου	334
• Το θεώρημα της οξείας γωνίας	334
• Το θεώρημα της αμβλείας γωνίας	336
• Μια ιδιότητα της διαμέσου τριγώνου	337
• Μια ιδιότητα του ύψους ορθογωνίου τριγώνου	338
• Μια ιδιότητα της διαμέσου προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου	338
• Ισεμβαδικότητα	339
• Ασκήσεις και δραστηριότητες	342
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22</b>	345
<b>Ο κύκλος</b>	
• Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες	346
• Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	347
• Εγγράψιμα και περιγράψιμα πολύγωνα σε κύκλο	350



- Η μέτρηση του κύκλου 356
- Η μοίρα ως μονάδα μέτρησης 361
- Πώς μέτρησε ο Ερατοσθένης την περιφέρεια της Γης; 362
- Ο τετραγωνισμός του κύκλου 363
- Ασκήσεις και δραστηριότητες 365

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23** 367

### **Μη ευκλείδεια παρέκβαση: Μετασχηματισμοί του επιπέδου**

- Συμμετρία ως προς την ευθεία 368
- Συμμετρία ως προς το σημείο 369
- Μετασχηματισμοί στο επίπεδο 370

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24** 373

### **Στερεά σχήματα**

- Τι λέμε στερεά σχήματα; 374
- Πρίσματα 374
- Ο κύβος 375
- Παραλληλεπίπεδα 377
- Πυραμίδες 378
- Ο κύλινδρος 380
- Ο κώνος 382
- Η σφαίρα 385
- Τα κυρτά κανονικά πολύεδρα (πλατωνικά στερεά) 387
- Ασκήσεις και δραστηριότητες 391

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	395
<b>ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</b>	
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 1 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	397
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 2 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	401
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 3 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	404
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 4 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	408
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 5 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	414
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 6 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	421
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 7 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	424
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 8 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	427
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 9 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	429
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 10 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	433
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 11 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	440
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 12 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	443
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 13 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	446
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 14 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	447
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 16 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	451
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 17 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	453
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 18 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	455
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 19 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	458
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 20 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	461
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 21 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	465
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 22 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	472
● Λύσεις και απαντήσεις ασκήσεων 24 <sup>ου</sup> Κεφαλαίου	478