ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι φυσικοί αριθμοί και η αναπαράστασή τους

CD

400

$(1100\ 10000)_2$

- Οι φυσικοί αριθμοί
- Η σχέση της ισότητας και της ανισότητας των φυσικών αριθμών
- Η αναπαράσταση των φυσικών αριθμών
- Η γραπτή συμβολική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών
- Το ρωμαϊκό σύστημα αναπαράστασης
- Το ινδοαραβικό σύστημα αναπαράστασης
- Η αριθμογραμμή
- Ασκήσεις και δραστηριότητες

1.1. Οι φυσικοί αριθμοί

Λέγοντας **αριθμητικό σύστημα των φυσικών αριθμών** εννοούμε την ολότητα των φυσικών αριθμών μαζί με τις συνήθεις τέσσερις μεταξύ τους **πράξεις** (την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση) και τις μεταξύ τους **σχέσεις**. Το σύστημα των φυσικών αριθμών άλλωστε χαρακτηρίζει μια βαθιά ιδιότητα που, όπως θα δούμε, μπορεί να εκφραστεί με δύο κατ' ουσίαν ισοδύναμους τρόπους, ως **αρχή της μαθηματικής επαγωγής** ή **ως αρχή του μικρότερου στοιχείου**.

Τι εννοούμε όμως λέγοντας φυσικός αριθμός; Μολονότι μαθαίνουμε να χρησιμοποιούμε τους φυσικούς αριθμούς από πολύ μικρή ηλικία, η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι τόσο απλή όσο θα νόμιζε κανείς. Ίσως δεν θα ήταν υπερβολικό να πούμε ότι το ερώτημα αυτό θυμίζει το ερώτημα «Τι είναι ο χρόνος;» για το οποίο ο Αυγουστίνος (354-430 μ.Χ.) γράφει στο 11ο βιβλίο των *Εξομολογήσεών* του ότι «όταν κανείς δεν μου θέτει το ερώτημα, ξέρω τι είναι. Αν όμως θελήσω να το ερμηνεύσω σε κάποιον, δεν ξέρω τι να πω»[1].

Μία απάντηση που άσκησε επιρροή στην εξέλιξη των μαθηματικών είναι αυτή που δίνει ο Ευκλείδης (γύρω στο 300 π.Χ.) στο 7ο βιβλίο των *Στοιχείων* του.

Η απάντηση αυτή παρά την κριτική που υπέστη, όχι μόνον εξακολουθεί να απηχεί σε σύγχρονες απαντήσεις του ερωτήματος, αλλά είναι και πολύ χρήσιμη στη διδασκαλία της έννοιας του φυσικού αριθμού στις μικρές ηλικίες[2]. Διαβάζουμε λοιπόν στο 7ο βιβλίο των *Στοιχείων* του:

> *Μονάς εστίν, καθ' ην έκαστον των όντων εν λέγεται*, δηλαδή μονάδα είναι αυτό εξαιτίας του οποίου κάθε ον λέγεται ένα (7ο βιβλίο, ορισμός 1).
>
> *Αριθμός δε το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος*, δηλαδή (φυσικός) αριθμός είναι πλήθος μονάδων (7ο βιβλίο, ορισμός 2).

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό γεννήτρια όλων των φυσικών αριθμών είναι η ακέραια μονάδα και κάθε φυσικός αριθμός παράγεται με την επανάληψή της. Βλέπουμε ότι ο ευκλείδειος ορισμός στέκεται αμήχανα απέναντι στο ένα και

---

[1] Αυγουστίνος, *Εξομολογήσεις* (μετ. Φ. Αμπατζοπούλου), εκδ. Πατάκη, Αθήνα 1997, τ. ΙΙ, σ. 166.

[2] Mayberry, J. P., *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications Ser., Vol. 82, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

σίγουρα εξαιρεί το μηδέν από τους αριθμούς.

Πράγματι το ένα και το μηδέν δεν θεωρούνταν αριθμοί στη μαθηματική παράδοση των αρχαίων Ελλήνων. Πρώτος (φυσικός) αριθμός θεωρούνταν το *δύο*, το οποίο μάλιστα ως τέτοιο ξεχώριζε. Ακόμη και το 1478, στην πρώτη έντυπη *Αριθμητική του Τρεβίζο*[3], ο ανώνυμος συγγραφέας της γράφει: «Ο αριθμός είναι πλήθος που συγκροτείται ή σχηματίζεται από πολλές μονάδες, και πάντα από δύο τουλάχιστον, όπως στην περίπτωση του 2 που είναι ο πρώτος και μικρότερος αριθμός». Θυμήσου εξάλλου, ότι στην αρχαία ελληνική αλλά και σε άλλες γλώσσες μεταξύ του ενικού αριθμού και του πληθυντικού παρεμβάλλεται ο δυικός αριθμός που αναφέρεται σε πλήθος δύο πραγμάτων.

Εξάλλου, η συμπερίληψη του μηδενός στους φυσικούς αριθμούς αποτελεί σπουδαία και χρήσιμη κατάκτηση του ανθρώπινου πνεύματος που πρωτοεμφανίζεται στον ινδικό πολιτισμό και υιοθετείται και διαδίδεται από τον ισλαμικό. Η αποδοχή του στη «Δύση» και η συνακόλουθη χρήση του έχει ερμηνευθεί ως μία από τις χαρακτηριστικά «μοντέρνες χειρονομίες»[4].

Για τη συνέχεια εμείς ας συμφωνήσουμε στην ακόλουθη, μοντέρνα και χρηστική προσέγγιση του φυσικού αριθμού:

Η ακέραια μονάδα δηλώνει την ύπαρξη κάποιου (ακέραιου) όλου.

Θα λέμε φυσικό αριθμό οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος ακέραιων μονάδων, συμπεριλαμβανόμενων τόσο του «μοναδιαίου πλήθους» μονάδων (δηλαδή του ενός) όσο και του «ανύπαρκτου πλήθους» μονάδων (δηλαδή του μηδενός).

Επομένως, με τους φυσικούς αριθμούς μετράμε ποσότητες ακέραιων όλων, απαντάμε στο ερώτημα *πόσα είναι τα ακέραια όλα τάδε είδους;*

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι θεωρούμε την έννοια του πεπερασμένου διαισθητικά κατανοητή και μόνον αργότερα θα προχωρήσουμε σε μαθηματική ανάλυσή της με τη βοήθεια της έννοιας της συνάρτησης. Το ευκλείδειο **πλήθος** είναι φυσικά πεπερασμένο.

Η παρακάτω εξεικόνιση του φυσικού αριθμού, που είναι και ιστορικά πρώιμη, είναι πολύ χρήσιμη: Αν συμβολίσουμε την ακέραια μονάδα με μία κατακόρυφη γραμμή |, τότε οποιοσδήποτε μη μηδενικός φυσικός αριθμός

---

[3] David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, σ. 2.

[4] Brian Rotman, *Signifying Nothing, The semiotics of zero*, Stanford University Press, 1993.

δεν είναι παρά ένα (πεπερασμένο) πλήθος από τέτοιες κατακόρυφες γραμμές, έχει δηλαδή, λόγου χάρη, τη μορφή ||||. Πρόσεξε ότι έτσι το μηδέν δεν είναι ορατό!

1.2. Η σχέση της ισότητας και της ανισότητας των φυσικών αριθμών

Δύο φυσικοί αριθμοί μ και ν (δηλαδή δύο πεπερασμένα πλήθη ακέραιων μονάδων όπως ορίστηκαν παραπάνω) είναι **ίσο**ι, ανν* ο μ έχει *τόσες* μονάδες *όσες* έχει και ο ν.

Αν οι μ και ν είναι ίσοι, γράφουμε μ = ν, αλλιώς γράφουμε μ $\neq$ ν.

Αργότερα θα δούμε ότι η έννοια της 1-1 συνάρτησης είναι η μαθηματική μοντελοποίηση της έκφρασης **όσα τάδε τόσα δείνα**.

Ένα πλήθος Α το αντιλαμβανόμαστε ως **μεγαλύτερο** από ένα πλήθος Β, εάν το Α αποτελείται από **περισσότερα** άτομα. Επομένως,

ο φυσικός αριθμός μ είναι **μεγαλύτερος** από τον αριθμό ν (γράφουμε **μ** > **ν**) ανν οι μονάδες του μ είναι περισσότερες από τις μονάδες του ν.

Επομένως, μ > ν ανν κάθε φορά, που εγώ σβήνω μία μονάδα του μ, εσύ σβήνεις μία μονάδα του ν, κάποια στιγμή εγώ θα μπορέσω να σβήσω μονάδα του μ, ενώ εσύ θα έχεις σβήσει όλες τις μονάδες του ν.

Όταν ο μ είναι μεγαλύτερος από τον ν, λέμε και ότι ο ν είναι **μικρότερος** από τον μ (γράφουμε **ν** < **μ**).

Είναι επομένως φανερό ότι

αν μας δώσουν δύο φυσικούς αριθμούς μ και ν, μεταξύ τους ισχύει μία (και μόνο μία) από τις σχέσεις μ > ν, μ = ν, μ < ν.

---

* ανν είναι συντομογραφία της φράσης «αν και μόνον αν».

1.3. Η αναπαράσταση των φυσικών αριθμών

Οι φυσικοί αριθμοί έχουν ονομασίες. Στα ελληνικά, τους όρους της δίχως πέρας ακολουθίας των φυσικών αριθμών τους ονομάζουμε, τους γράφουμε και τους διαβάζουμε **μηδέν, ένα, δύο τρία, τέσσερα, πέντε, έξι, επτά, οκτώ, εννέα, δέκα, ένδεκα** (δέκα συν εν), **δώδεκα** (δέκα και δύο), **δεκατρία, δεκατέσσερα, δεκαπέντε, δεκαέξι, δεκαεπτά, δεκαοκτώ, δεκαεννέα, είκοσι, είκοσι ένα, είκοσι δύο,** κ.ο.κ.

Όταν βλέπουμε ένα πλήθος πραγμάτων αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι το πλήθος αυτό αντιστοιχεί σε κάποιον φυσικό αριθμό, αλλά για να πούμε από πόσα *ακριβώς* πράγματα αποτελείται το πλήθος πρέπει να τα *απαριθμήσουμε*, δηλαδή να αποδώσουμε σε καθένα από αυτά μία και μόνον μία από τις ονομασίες της αριθμητικής ακολουθίας, ένα, δύο, τρία, κ.λπ. Το τελευταίο αριθμητικό όνομα που προφέρουμε, με το οποίο και εξαντλούνται όλα τα πράγματα, αποκαλύπτει και τον φυσικό αριθμό που αντιστοιχεί στο πλήθος αυτό. Είναι φανερό ότι το όνομα αυτό δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία ονομάστηκαν τα πράγματα. Πρόσεξε ότι συνήθως, ειδικά στην πρακτική αριθμητική, αγνοούμε το μηδέν στην απαρίθμηση αυτή και αρχίζουμε με το ένα. Ωστόσο αν αρχίζαμε με το μηδέν, τότε το πλήθος των μετρημένων μονάδων είναι ο αριθμός που έπεται αμέσως, στην αριθμητική ακολουθία, του αριθμού που προφέρθηκε τελευταίος.

Ειδικότερα, όταν δούμε ένα πλήθος μονάδων στη συνηθισμένη γραμμική εξεικόνιση που είδαμε, μπορούμε να το ονομάσουμε ως μη μηδενικό φυσικό αριθμό απαριθμώντας τις μονάδες του, δηλαδή αποδίδοντας τους όρους της αριθμητικής ακολουθίας ένα, δύο, τρία κ.λπ. (ή και της ακολουθίας μηδέν, ένα, δύο, κ.λπ.) στις μονάδες του, αρχίζοντας λ.χ. από τα αριστερά, δεδομένου ότι έτσι, με αυτή τη φορά, διαβάζουμε και γράφουμε στα ελληνικά.

Λόγου χάρη, το παρακάτω πλήθος είναι ο φυσικός αριθμός πέντε (5).

I	I	I	I	I
ένα	δύο	τρία	τέσσερα	πέντε
μηδέν	ένα	δύο	τρία	τέσσερα

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ανθρωπολόγοι έχουν συναντήσει πολιτισμούς των οποίων η γλώσσα διαθέτει ονομασίες για το ένα και το δύο, εκφράζει μέσω αυτών με τον προφανή τρόπο το τρία και το τέσσερα, αλλά από εκεί και πέρα καταφεύγει στη λέξη «πολλά» και τα συνώνυμά της[5].

1.4. Η γραπτή συμβολική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών

Παντοειδή τεκμήρια μας αποκαλύπτουν ότι οι άνθρωποι από πολύ παλιά επιχείρησαν να αναπαραστήσουν συμβολικά τους αριθμούς και ειδικότερα τους φυσικούς αριθμούς που χρησιμοποιούν. Ο απλούστερος τέτοιος τρόπος είναι μέσω της επαναληπτικής καταγραφής της μονάδας και συνδέεται με την πρώιμη απαριθμητική χρήση των φυσικών αριθμών. Τον τρόπο αυτό μπορούμε να τον αναγνωρίσουμε ακόμη και επάνω σε απολιθωμένο κόκκαλο που χρονολογήθηκε στο 20000 π.Χ. και βρέθηκε στο Ζαΐρ[6]. Δηλαδή, για να καταγράψω μια ακέραια ποσότητα κάποιου είδους σημειώνω ένα χαρακτηριστικό, ορισμένο σημάδι, λ.χ. κάνω μια εγκοπή πάνω σε ένα τρυφερό κομμάτι ξύλου, πάνω σε μια πήλινη πλάκα, πάνω στην άμμο, πάνω στον πάπυρο ή στο χαρτί, συμβολικά |. Οπότε, π.χ. ένα = |, τρία = |||, τέσσερα = ||||, δεκαοκτώ = ||||||||||||||||||.

Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε τα προβλήματα που υπάρχουν σε έναν τέτοιον τρόπο αναπαράστασης. Φαντάσου την καταγραφή των ποσών που κινούνται σε έναν τραπεζικό λογαριασμό αλλά και τη δυσκολία της άμεσης και εύκολης διάκρισης μεταξύ του |||||||||||||||||| και του ||||||||||||||||||||.

[5] Geoges Ifrah, *Histoire Universelle des Chiffres*, Robert Laffont, Paris, 1994, σ. 30.

[6] Victor J. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών: Μια Εισαγωγή*, (μετ. Κώστα Χατζηκυριάκου), Π.Ε.Κ., 2013, σ. 5.

Εικ. 1. Οι δύο όψεις του κόκκαλου του Ishango.
(Βελγικό Βασιλικό Ινστιτούτο Φυσικών επιστημών, Βρυξέλες)

Είναι λογικό –και έτσι έγινε στην ιστορία- οι άνθρωποι να επινοήσουν συστήματα που ομαδοποιούν τα πλήθη των χαρακτηριστικών σημαδιών και τις ομάδες που προκύπτουν να τις συμβολίζουν με νέα σύμβολα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος αναπαράστασης είναι το **ρωμαϊκό σύστημα**, μια ιστορική παραλλαγή του οποίου θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

1.5. Το ρωμαϊκό σύστημα αναπαράστασης

Το σύστημα αυτό χρησιμοποιήθηκε επί πολλούς αιώνες, από πολλούς ανθρώπους και σε πολλά διαφορετικά μέρη και είναι επόμενο να έχει πολλές παραλλαγές. Εδώ, θα **συμφωνήσουμε** ότι η αναπαράσταση με το ρωμαϊκό σύστημα ακολουθεί τους παρακάτω κανόνες.

α) Τα βασικά σύμβολα για την αναπαράσταση αυτή είναι τα:

I (ένα)		**II** (δύο)	**III** (τρία)	**IV** (τέσσερα)
V (πέντε)	**VI** (έξι)	**VII** (επτά)	**VIII** (οκτώ)	**IX** (εννέα)
X (δέκα)		**XX** (είκοσι)	**XXX** (τριάντα)	**XL** (σαράντα)
L (πενήντα)				**XC** (ενενήντα)
C (εκατό)		**CC** (διακόσια)	**CCC** (τριακόσια)	**CD** (τετρακόσια)
D (πεντακόσια)				**CM** (εννιακόσια)
M (χίλια)		**MM** (δύο χιλιάδες)	**MMM** (τρεις χιλιάδες)	

β) Για να αναπαραστήσουμε έναν αριθμό χρησιμοποιούμε τα παραπάνω σύμβολα στη σειρά έτσι ώστε οι φυσικοί αριθμοί που αναπαριστάνουν τα σύμβολα από τα αριστερά στα δεξιά να μικραίνουν. Το πλήθος των μονάδων που αναπαριστάνουν τα σύμβολα είναι το πλήθος των μονάδων του αριθμού. Πρόσεξε ότι τα σύμβολα I, X, C, M (και μόνον αυτά) επιτρέπεται να επαναληφθούν έως και τρεις φορές στη σειρά.
Π.χ. ο ογδόντα εννέα αναπαριστάνεται με LXXXIX και **όχι** με XLXLIX. Επίσης το XLIX δεν μπορεί να είναι ο αριθμός (που εμείς γράφουμε) 51 (41+10) ούτε ο 71 (10+50+1+10), ούτε ο 69 (10+50+9), αλλά μόνον ο 49 (40+9).

γ) Οριζόντια γραμμή πάνω από μια σειρά συμβόλων σημαίνει πολλαπλασιασμό του αριθμού που αναπαριστάνεται με αυτή επί χίλια.
Π.χ. $\overline{\mathrm{X}}$ = δέκα επί χίλια = δέκα χιλιάδες, $\overline{\mathrm{IV}}$ = τέσσερις χιλιάδες (όχι MMMM) και $\overline{\mathrm{MCDIX}}$ = χίλια τετρακόσια εννέα επί χίλια = ένα εκατομμύριο τετρακόσιες εννέα χιλιάδες.

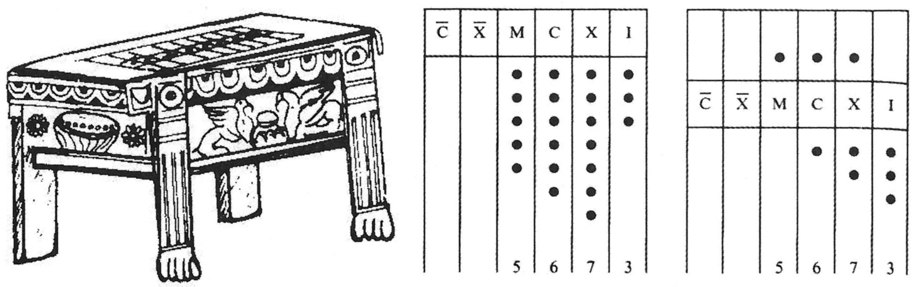
δ) Μία κατακόρυφη γραμμή στα αριστερά, μία στα δεξιά μαζί με μία οριζόντια γραμμή πάνω από μια σειρά συμβόλων σημαίνει πολλαπλασιασμό της αξίας που αυτές αντιπροσωπεύουν επί εκατό χιλιάδες.
Π.χ. $\left|\overline{\mathrm{X}}\right|$ = δέκα επί εκατό χιλιάδες = ένα εκατομμύριο και $\left|\overline{\mathrm{MXCIX}}\right|$ = χίλια ενενήντα εννέα επί εκατό χιλιάδες = εκατόν εννέα εκατομμύρια και εννιακόσιες χιλιάδες.

Παρατήρησε ότι δεν υπάρχει (και δεν απαιτείται!) σύμβολο για τον μηδέν. Βλέπουμε επίσης ότι η αναπαράσταση αυτή δεν οδηγεί σε μονοσήμαντες αναπαραστάσεις, αφού το τετρακόσιες πενήντα επτά χιλιάδες διακόσια εβδομήντα τρία εξίσου ορθά, σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες, μπορεί να γραφεί είτε $\overline{\mathrm{CDLVII}}\,\mathrm{CCLXXIII}$ είτε $\left|\overline{\mathrm{IV}}\right|\overline{\mathrm{LVII}}\,\mathrm{CCLXXIII}$. Στην πρώτη γραφή σκεφτόμαστε το 457273 ως 457·1000 + 273, ενώ στη δεύτερη γραφή ως 4·100000 + 57 + 273. Άλλωστε έχουν σωθεί επιγραφές όπου το τέσσερις χιλιάδες αναπαριστάνεται με MMMM αλλά και με $\overline{\mathrm{IV}}$, δηλαδή δεν τηρείται ο κανόνας β.

Πρόσεξε ότι το σύστημα που περιγράψαμε είναι απλά ένα σύστημα καταγραφής, δεν βοηθά καθόλου στους υπολογισμούς. Μπορείς, λ.χ. να φανταστείς έναν κανόνα που θα σου επιτρέψει να προσθέσεις *μηχανικά* τους αριθμούς

MXLIV και DXCIX;

Ο πρώτος είναι ο χίλια σαράντα τέσσερα και ο δεύτερος ο πεντακόσια ενενήντα εννέα. Το άθροισμά τους είναι ο χίλια εξακόσια σαράντα τρία: MDCXLIII. Βλέπεις κάποιον **αλγόριθμο**, δηλαδή κάποια δοσμένη εκ των προτέρων σειρά «εντολών» που εκτελώντας τις πιστά καταλήγεις πάντα στο σωστό αποτέλεσμα; Δεν υπάρχει. Οι Ρωμαίοι για να κάνουν πράξεις δεν χρησιμοποιούσαν το ίδιο το σύστημα της αναπαράστασης, αλλά τον **άβακα με πούλια**, έναν «χειροκίνητο υπολογιστή». Ο ρωμαϊκός άβακας με πούλια αποτελούνταν από ένα τραπέζι, η επίπεδη επιφάνεια του οποίου ήταν χωρισμένη με παράλληλες γραμμές σε περιοχές που αντιπροσώπευαν τις βασικές αριθμητικές τάξεις μεγέθους (I, X, C, M, $\overline{X}$, $\overline{C}$) του ρωμαϊκού συστήματος αναπαράστασης[7]. Στην Εικ. 2, βλέπουμε δύο σχηματικές αναπαραστάσεις του αριθμού 5673 σε ένα ρωμαϊκό άβακα. (Σε ποια αρχή στηρίζεται η δεύτερη απλοποιημένη αναπαράσταση;)



Εικ. 2. (Αριστερά) Ένας ρωμαϊκός άβακας με πούλια.
(Δεξιά) Δύο αναπαραστάσεις του αριθμού 5673 στον ρωμαϊκό άβακα με πούλια.

Διαφορετικά είναι τα πράγματα με το **ινδοαραβικό** σύστημα αριθμητικής αναπαράστασης, που είναι ένα σύστημα **με βάση** και **αξία θέσης,** και το οποίο πέρα από το να είναι σύστημα αναπαράστασης και καταγραφής παρέχει και μηχανικούς τρόπους τέλεσης των βασικών πράξεων, της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

---

[7] Georges Ifrah, *Histoire Universelle des Chiffres*, Robert Laffont, 1994, σ. 491-94. Από το βιβλίο αυτό προέρχονται τα σχήματα της Εικ. 2.

1.6. Το ινδοαραβικό σύστημα

Στο ινδοαραβικό σύστημα με βάση το δέκα που χρησιμοποιούμε σήμερα:

α) Όλοι οι αριθμοί γράφονται με τη βοήθεια των παρακάτω δέκα ψηφίων, καταγράφονται οριζόντια και διαβάζονται από τα αριστερά προς τα δεξιά: **0** (μηδέν), **1** (ένα), **2** (δύο), **3** (τρία), **4** (τέσσερα), **5** (πέντε), **6** (έξι), **7** (επτά), **8** (οκτώ), **9** (εννέα).

β) Τα ψηφία αυτά ανάλογα με τη θέση που έχουν στην αναπαράσταση, έχουν διαφορετική αξία, δηλαδή αναπαριστάνουν μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κ.ο.κ. όταν αντίστοιχα βρίσκονται στη δεξιότερη θέση της αναπαράστασης, στην αμέσως προηγούμενη της δεξιότερης, στην αμέσως προηγούμενη της δεξιότερης της δεξιότερης κ.ο.κ.

Το ινδοαραβικό σύστημα αναπαράστασης εισήγαγε στη Δύση ο Λεονάρντο της Πίζας (π. 1170 – π. 1250 μ.Χ.), ο γνωστός ο Fibonacci, με το βιβλίο *Liber Abbaci* (1202 και επανέκδοση 1228). Γράφει σε αυτό ο Λεονάρντο: «Τα εννέα ψηφία των Ινδών είναι τα 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Με αυτά και το σύμβολο 0, που οι Άραβες αποκαλούν «ζέφιρουμ» μπορεί να γραφεί κάθε αριθμός, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια»[8].

Στην Αριθμητική του Τρεβίζο πάλι διαβάζουμε: «Αρίθμηση είναι η αναπαράσταση των αριθμών με ψηφία. Αυτό γίνεται με δέκα χαρακτήρες ή ψηφία όπως δείχνουμε εδώ: i, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Από τα ψηφία αυτά το πρώτο i, δεν αποκαλείται αριθμός, αλλά πηγή του αριθμού. Το δέκατο ψηφίο, 0, αποκαλείται ζέφιρουφ (*zephirum*) ή *nulla*, δηλαδή είναι το ψηφίο για το τίποτα, αφού από μόνο του δεν έχει καμία αξία, μολονότι μαζί με τα άλλα μεγαλώνει την αξία τους»[9].

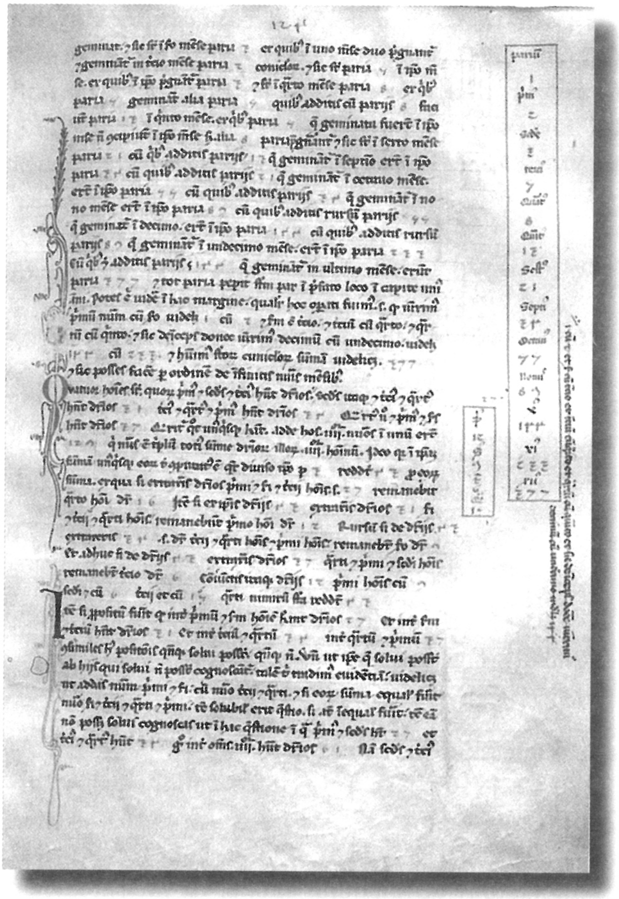
Το ινδοαραβικό σύστημα ονομάζεται έτσι γιατί, από όσα γνωρίζουμε από την ιστορική έρευνα, στο πλαίσιο του ινδικού πολιτισμού γύρω στον έβδομο αιώνα άρχισε να χρησιμοποιείται ένα σύστημα με αξία θέσης και βάση το 10, στο οποίο το μηδέν αναπαριστανόταν με μία τελεία. Το σύστημα αυτό υιοθέτησαν οι μουσουλμάνοι, οι οποίοι χρησιμοποίησαν το κυκλάκι για να αναπαραστήσουν το μηδέν, και μέσω αυτών διαδόθηκε στη μεσαιωνική Ευρώπη.

---

[8] Όπως παρατίθεται στο Victor J. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών: Μια εισαγωγή*, σ. 352.

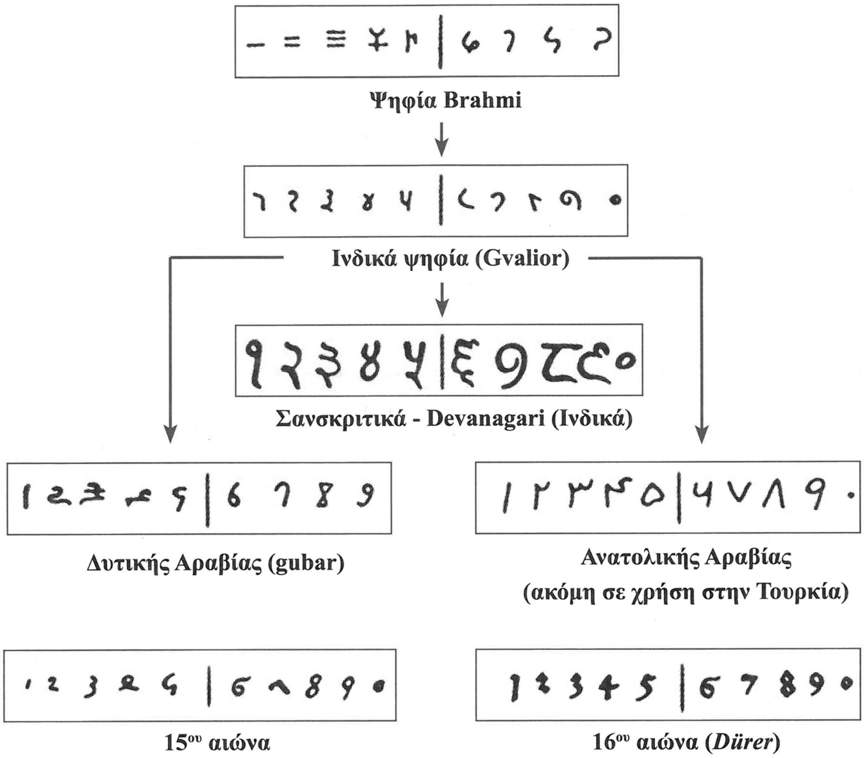
[9] David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, σ. 2.

Παράδειγμα. Ο φυσικός αριθμός που γράφουμε 72 αποτελείται από εβδομήντα δύο μονάδες, αφού το 7 δηλώνει δεκάδες και το 2 μονάδες. Ο 702 αποτελείται από εφτακόσιες δύο μονάδες, αφού τώρα το 7 δηλώνει εκατοντάδες, το 0 δεκάδες και το 2 μονάδες. Ο 720 αποτελείται από εφτακόσιες είκοσι μονάδες, αφού εδώ το 7 δηλώνει εκατοντάδες, το 2 δεκάδες και το 0 μονάδες. Παρατήρησε ότι ο 072 δεν είναι παρά ο 72, αφού το 0 δηλώνει την ανυπαρξία εκατοντάδων.



Εικ. 3. Μια σελίδα από το *Liber Abbaci* του Λεονάρντο της Πίζας.

Αξίζει να αναφέρουμε εδώ ότι το ινδοαραβικό σύστημα είναι γνωστό (μολονότι δεν χρησιμοποιείται) σε ορισμένους κύκλους βυζαντινών λογίων στα τέλη του δέκατου τρίτου και τις αρχές του δέκατου τέταρτου αιώνα, χάρη στα έργα *Αρχή της Μεγάλης και Ινδικής Ψηφοφορίας* (αγνώστου συγγραφέα) και *Ψηφοφορία κατ' Ινδούς* του Μάξιμου Πλανούδη.



Εικ. 4. Η ανάπτυξη των σύγχρονων αριθμητικών ψηφίων (σύμφωνα με τον Karl Menninger στο Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers, Dover Publications, 1992).

Παράδειγμα. Ας δούμε λεπτομερώς ποια θα είναι η αναπαράσταση του χίλια εξακόσια σαράντα τρία. Φαντάσου ότι τις μονάδες του τις ομαδοποιείς σε δεκάδες. Πόσες τέτοιες μπορεί να συγκροτηθούν; Προφανώς εκατόν εξήντα τέσσερις δεκάδες (μονάδων) και περισσεύουν τρεις μονάδες. Τις εκατόν εξήντα τέσσερις δεκάδες, τις ομαδοποιούμε ξανά σε δεκάδες. Συγκροτούμε έτσι δεκαέξι δεκάδες δεκάδων (μονάδων) και απομένουν τέσσερις δεκάδες (μονάδων). Τις δεκαέξι δεκάδες τις ομαδοποιούμε ξανά σε δεκάδες. Συγκροτούμε έτσι μία δεκάδα δεκάδων δεκάδων (μονάδων), δηλαδή μία χιλιάδα μονάδων, και απομένουν έξι δεκάδες δεκάδων (μονάδων), δηλαδή έξι εκατοντάδες μονάδων.

Συνοπτικά τα παραπάνω τα αποδίδουμε με το σύμβολο 1643 που δηλώνει τον αριθμό που αποτελείται από μία χιλιάδα, έξι εκατοντάδες, τέσσερις δεκάδες και τρεις μονάδες, δηλαδή

$$\begin{aligned} 1643 &= 164\cdot 10+3 \\ &= 16\cdot 10\cdot 10+4\cdot 10+3 \\ &= 1\cdot 10\cdot 10\cdot 10+6\cdot 10\cdot 10+4\cdot 10+3 \\ &= 1\cdot 1000+6\cdot 100+4\cdot 10+3 \\ &= 1\cdot 10^3+6\cdot 10^2+4\cdot 10^1+3\cdot 10^0 \end{aligned}$$

(με συμβολισμό δυνάμεων, βλ. κεφ. 2)

Παρατήρηση. Όπως φαίνεται από τις παραπάνω ισότητες, η κανονική αναπαράσταση 1643 του αριθμού χίλια εξακόσια σαράντα τρία (τέταρτη ισότητα) μας επιτρέπει να τον σκεφτόμαστε και με άλλους τρόπους: ως 164 δεκάδες και 3 μονάδες (πρώτη ισότητα) ή ως 16 εκατοντάδες, 4 δεκάδες και 3 μονάδες (δεύτερη ισότητα). Η παρατήρηση αυτή είναι πολύ σημαντική για την εκτέλεση της πράξης της διαίρεσης.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να καταλήξουμε στο γενικό αποτέλεσμα ότι:

κάθε φυσικός αριθμός N μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$N = a_\nu \cdot 10^\nu + \ldots + a_3 \cdot 1000 + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 = (a_\nu \ldots a_3 a_2 a_1 a_0)_{10},$$

όπου ν είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίον ο αριθμός 10^ν είναι μικρότερος ή ίσος του N, οι συντελεστές a_i των δυνάμεων του δέκα είναι αριθμοί μικρότεροι του δέκα και επιπλέον ο a_ν είναι μη μηδενικός φυσικός αριθμός.

Όπως καταλαβαίνεις, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει και με δυάδες, τετράδες (δυάδες δυάδων), οκτάδες (δυάδες δυάδων δυάδων), δεκαεξάδες κ.λπ. ή με επτάδες, σαρανταεννεάδες (επτάδες επτάδων) κ.ο.κ. ή και με δωδεκάδες (ντουζίνες), δωδεκάδες δωδεκάδων κ.λπ.

Επομένως καταλήγουμε στο ακόμη πιο γενικό αποτέλεσμα ότι:

κάθε φυσικός αριθμός N μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$N = a_\nu \cdot \beta^\nu + \ldots + a_3 \cdot \beta^3 + a_2 \cdot \beta^2 + a_1 \cdot \beta + a_0 = (a_\nu \ldots a_3 a_2 a_1 a_0)_\beta,$$

όπου β > 1 είναι φυσικός αριθμός, ν είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίον ο β^ν είναι μικρότερος ή ίσος του Ν, οι συντελεστές a_i των δυνάμεων του β είναι αριθμοί μικρότεροι του β και επιπλέον ο a_ν δεν είναι μηδέν.

Παρατήρησε ότι στο σύστημα με βάση β, $\beta = (10)_\beta$. Π.χ. $2 = (10)_2$ και $9 = (10)_9$.

Παράδειγμα (με βάση τον 2). Η δυαδική αναπαράσταση ενός φυσικού αριθμού που ένας από τους πρώιμους μελετητές της ήταν ο σπουδαίος φιλόσοφος Leibniz (1646-1716) έχει αποκτήσει μεγάλη σημασία σήμερα στη θεωρία της πολυπλοκότητας και των αλγορίθμων που συνδέεται με την επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σύμφωνα με όσα είπαμε χρειαζόμαστε μόνον δύο ψηφία το 1 και το 0 για να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε φυσικό αριθμό.

α) Γράψε τον 25 στο δυαδικό σύστημα.

Έχουμε: $25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11001)_2$.

Όντως οι 25 μονάδες χωρίζονται σε δώδεκα δυάδες και **περισσεύει μία μονάδα**.

Οι δώδεκα δυάδες χωρίζονται σε έξι δυάδες (δυάδων) και δεν περισσεύει **καμία δυάδα**.

Οι έξι δυάδες (δυάδων) χωρίζονται σε τρεις δυάδες (δυάδων δυάδων) και **δεν περισσεύει** καμία δυάδα δυάδων, δηλαδή **καμία τετράδα**.

Οι τρεις δυάδες (δυάδων δυάδων) δίνουν μία δυάδα (δυάδων δυάδων δυάδων), δηλαδή **μία δεκαεξάδα**, και **περισσεύει** μία δυάδα (δυάδων δυάδων), δηλαδή **μία οκτάδα**.

Άρα 25 = **μία δεκαεξάδα** και **μία οκτάδα** και **καμία τετράδα** και **καμία δυάδα** και **μία μονάδα** = $(11001)_2$.

Πιο συνοπτικά, μπορούμε να περιγράψουμε την παραπάνω διεργασία με τις ακόλουθες διαδοχικές διαιρέσεις:

$$\begin{aligned} 25 &= 2\cdot 12 + \mathbf{1} \\ 12 &= 2\cdot 6 + \mathbf{0} \\ 6 &= 2\cdot 3 + \mathbf{0} \\ 3 &= 2\cdot 1 + \mathbf{1} \\ 1 &= 2\cdot 0 + \mathbf{1} \end{aligned} \Big\uparrow$$

Δηλαδή, διαβάζοντας από κάτω προς τα πάνω, 25 = $(11001)_2$.

Εναλλακτικά, έχοντας στο νου μας το προηγούμενο γενικό αποτέλεσμα, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του δύο που δεν ξεπερνά τον 25; Η τέταρτη, αφού δύο στην τετάρτη κάνει δεκάξι, ενώ δύο στην πέμπτη κάνει 32.

Ποια είναι η δύναμη του δύο που δεν ξεπερνά το εννέα, εικοσιπέντε μείον δεκαέξι δηλαδή; Η τρίτη, αφού δύο στην τρίτη κάνει οκτώ και δύο στην τετάρτη κάνει δεκάξι.

Τι απομένει; Μία μονάδα. Επομένως,

$$25 = 16 + 9 = 16 + 8 + 1 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

β) Ποια είναι η δεκαδική αναπαράσταση του $(10110111)_2$; Του $(12340)_5$;

$$1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 128 = 183$$
$$0\cdot 1 + 4\cdot 5 + 3\cdot 25 + 2\cdot 125 + 1\cdot 625 = 20 + 75 + 250 + 625 = 970$$

Παράδειγμα (με βάση τον 11). Εδώ τα σύμβολα που μπορεί να χρησιμοποιηθούν στην αναπαράσταση είναι τα 0, 1, …, 9 και ένα σύμβολο για τον δέκα που φυσικά δεν μπορεί να γραφεί ως 10 που είναι η *δεκαδική* αναπαράσταση του δέκα. Ας χρησιμοποιήσουμε γι’ αυτόν το \$. Έχουμε τότε:

$$14409 = 10\cdot 11^3 + 9\cdot 11^2 + 0\cdot 11 + 10 = (\$90\$)_{11}$$

Σχόλιο. Η πρόταση της ελληνικής γλώσσας, «Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί κατά μοναδικό τρόπο στο ινδοαραβικό σύστημα αναπαράστασης με βάση το 10», είναι **αποφαντική** ή **δηλωτική**, δηλαδή είναι πρόταση με την οποία αποφαινόμαστε γύρω από την αλήθεια ή το ψεύδος μιας κατάστασης πραγμάτων. Αποφαντικές ή δηλωτικές είναι εξάλλου και οι προτάσεις:

α) Ο αριθμός 78 στο επταδικό σύστημα είναι το 140 β) Ο αριθμός 78 στο επταδικό σύστημα είναι το 141.

Ωστόσο, αν κάνεις τους υπολογισμούς, θα δεις ότι η πρώτη δήλωση είναι **ψευδής**, ενώ η δεύτερη είναι **αληθής**.

Ο γνωστικός κλάδος της Μαθηματικής Λογικής μελετά τέτοιου τύπου προτάσεις με τις οποίες διατυπώνονται αληθείς ή ψευδείς κρίσεις.

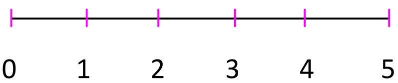
Σε αντιδιαστολή η πρόταση *Ας δούμε ποια θα είναι η αναπαράσταση του χίλια εξακόσια σαράντα τρία*, δεν είναι δηλωτική είναι **προτρεπτική** και δεν αποτελεί καθαυτή αντικείμενο λογικής μελέτης.

1.7. Η αριθμογραμμή

Ας εξετάσουμε πάλι έναν φυσικό αριθμό, λ.χ. τον IIIII. Ποιος είναι αυτός; Απαριθμώντας βλέπουμε ότι είναι το πέντε.

I	I	I	I	I
Ένα	Δύο	Τρία	Τέσσερα	Πέντε
1	2	3	4	5

Η στροφή στα δεξιά που υπονοούν τα βελάκια δημιουργεί την ακόλουθη εικόνα,



η οποία μπορεί να σχηματιστεί για οποιονδήποτε μη μηδενικό φυσικό αριθμό και μας επιτρέπει να φανταστούμε μιαν ημιευθεία, μια ευθεία που εκτείνεται απεριόριστα στα δεξιά δηλαδή, και πάνω της είναι σημειωμένοι οι φυσικοί αριθμοί που ισαπέχουν μεταξύ τους μήκος ίσο με το μήκος που έχει η γραμμή που αντιστοιχεί στην ακέραια μονάδα.

Η **αριθμογραμμή** αυτή απεικονίζει τη **διάταξη** των φυσικών αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί εκτείνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά ανάλογα με το πλήθος των μονάδων τους. Υπάρχει ένα αριστερό ακραίο σημείο, αλλά είναι φανερό ότι προς τα δεξιά η αριθμογραμμή εκτείνεται απεριόριστα, αφού δεν υπάρχει τελευταίος φυσικός αριθμός. Στα αμέσως αριστερά κάθε μη μηδενικού φυσικού βρίσκεται ο **προηγούμενός** του, που έχει μία μονάδα λιγότερη και στα αμέσως δεξιά κάθε φυσικού αριθμού βρίσκεται ο **επόμενός** του, που έχει μία μονάδα περισσότερη. Αν σκεφτείς ότι κάθε διάστημα της αριθμογραμμής αντιστοιχεί σε μία μονάδα, κατανοείς ότι κάθε φυσικός αριθμός στην αριθμογραμμή δηλώνει το πλήθος των διαστημάτων που έχουν μετρηθεί ως αυτόν. Παρατήρησε ότι το πλήθος αυτό είναι ίσο με το πλήθος των αριθμών που βρίσκονται στα αριστερά του, των αριθμών που προηγούνται στην αριθμογραμμή. Π.χ. το 3 δηλώνει ότι έχουν μετρηθεί τρία αντικείμενα και βλέπεις ότι πριν από αυτό στην αριθμογραμμή έχουμε τους 0, 1, 2.

Όταν σκεφτόμαστε έναν φυσικό αριθμό ως πλήθος μονάδων λέμε ότι τον σκεφτόμαστε υπό την **πληθική** έννοια, ενώ όταν τον σκεφτόμαστε ως σημείο στην αριθμογραμμή, ως όρο μιας σειράς, λέμε ότι τον σκεφτόμαστε υπό τη **διατακτική** έννοια. Η διάκριση αυτή υπάρχει και στη γραμματική. Θυμήσου ότι στη γραμματική πέρα από τους αριθμούς ως ονόματα, έχουμε και τα **αριθμητικά επίθετα** που διακρίνονται σε **απόλυτα** και **τακτικά**.

Παραδείγματος χάρη, λέμε ότι στον αγώνα δρόμου πήραν μέρος τριάντα αθλήτριες (τριάντα: απόλυτο αριθμητικό) και η δείνα βγήκε πέμπτη (πέμπτη: τακτικό αριθμητικό), δηλαδή πριν από αυτήν τερμάτισαν τέσσερις αθλήτριες, η πρώτη, η δεύτερη, η τρίτη και η τέταρτη. Πρόσεξε πάλι τη διαφορά ανάμεσα στην καθημερινή μέτρηση και τη «μαθηματική», στην οποία η πέμπτη θέση αντιστοιχεί στον αριθμό τέσσερα της αριθμογραμμής όπως την ορίσαμε παραπάνω. Βεβαίως, πριν από την πέμπτη αθλήτρια πάλι τερμάτισαν τέσσερις! Η αθλήτρια υπ’ αριθμ. 0, η υπ’ αριθμ. 1, η υπ’ αριθμ. 2 και η υπ’ αριθμ. 3.

Παρατήρησε ότι όταν θέλουμε να υπολογίσουμε *πόσα* πράγματα κάποιου είδους έχουμε, τα μετράμε, δηλαδή κατ’ ουσίαν τα βάζουμε στη *σειρά*.

Η επιθετική χρήση των αριθμών είναι μάλλον προφανές ότι προηγήθηκε. Τα απόλυτα επίθετα κάποτε ονοματοποιήθηκαν. Όπως παρατηρεί ο Raymond Wilder στη μετατροπή αυτή σημαντικό ρόλο πρέπει να έπαιξε και η συμβολική αναπαράσταση των αριθμών. Λόγου χάρη, το σύμβολο για το τίποτα, η τελεία αρχικά και το κυκλάκι αργότερα, συντέλεσαν στην ανάδυση του μαθηματικού μηδενός. Το ίδιο πρέπει να συνέβη πολύ νωρίτερα με το σύμβολο ΙΙ: η τριβή μαζί του συντέλεσε στο πέρασμα από το επίθετο *δύο* στο όνομα *δύο*, στην *έννοια* της δυαδικότητας[10].

[10] Raymond Wilder, *Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών*, Εκδοτικές Επιχειρήσεις Π. Κουτσούμπος, 1986, σ. 88.

◂ Ασκήσεις και δραστηριότητες ▸

1. Ποιος είναι ο Ευκλείδης, συγγραφέας των Στοιχείων; Πότε έζησε; Τι γνωρίζουμε γι’ αυτόν και για το έργο του; Από πού; Να διαβάσεις σχετικά σε μιαν εγκυκλοπαίδεια ή ένα βιβλίο ιστορίας των μαθηματικών ή ένα βιογραφικό λεξικό ή έναν αξιόπιστο δικτυακό τόπο και να απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα σύντομα και περιεκτικά (σε περίπου 200 λέξεις).

2. i. Ετυμολόγησε τις λέξεις *μαθηματικά*, *αριθμός*, *σύνολο*, *σχήμα*.
   ii. Γιατί λες να λέγονται τα *μαθηματικά* μαθηματικά; Μια απάντηση μπορείς να βρεις στο Ivor Thomas, *Greek Mathematical Works*, Α΄ τομ., Loeb Classical Library, σελ. 3. Σχολίασέ την.

3. Διάβασε σε μιαν εγκυκλοπαίδεια ή αλλού ποιοι ήταν οι Αυγουστίνος και Gottfried Leibniz που αναφέραμε και γράψε μια σύντομη αλλά περιεκτική παρουσίασή τους (έως 300 λέξεις για τον καθένα).

4. Να βρεις σε μιαν εγκυκλοπαίδεια ή ιστορία των μαθηματικών ή αλλού τις βασικές αρχές του τρόπου με τον οποίον οι αρχαίοι Έλληνες ή οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ή οι Βαβυλώνιοι αναπαριστούσαν τους φυσικούς αριθμούς. Δώσε παραδείγματα.

5. Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς στο ρωμαϊκό σύστημα.

   1453 1492 1789 1821 1848 1914 1917 1945 1968 2001

   Ως χρονολογίες οι αριθμοί αυτοί αντιστοιχούν σε λιγότερο ή περισσότερο σημαντικά ιστορικά γεγονότα. Γράψε ποια νομίζεις ότι είναι αυτά.

6. Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς στο ρωμαϊκό σύστημα.

   249 4599 20453 345984 1234567 87654321

7. Να γράψεις τους παρακάτω τέσσερις αριθμούς στο ινδοαραβικό σύστημα.

   MMCLXXVII, $\overline{|\mathrm{LXVII}|}$, $\overline{|\mathrm{MDCLI}|}\,\overline{\mathrm{LXXVIII}}$ CCCXVI, MDCCCX

8. Να γράψεις τους αριθμούς 1204, 1897, 1211 και 3179 στο τετραδικό, το επταδικό και το δωδεκαδικό σύστημα αναπαράστασης. Για τους αριθμούς 10 και 11 στο δωδεκαδικό χρησιμοποίησε τα ψηφία $ και &.

9. Να γράψεις τους αριθμούς $(453)_6$, $(10110111)_2$, $(3065)_8$ στο δεκαδικό σύστημα αναπαράστασης.

10. Σε κάποιο σύστημα αναπαράστασης (με βάση και αξία θέσης) ο αριθμός 2357 έχει επόμενο τον 2360.

    i. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός στο δεκαδικό σύστημα;
    ii. Γράψε τον στο ρωμαϊκό σύστημα.

11. Εάν γράψεις τον έναν μετά τον άλλον τους 2000 πρώτους φυσικούς αριθμούς, πόσες φορές θα χρησιμοποιηθεί το ψηφίο 1;

Α

1	3	5	7
9	11	13	15

Β

2	3	6	7
10	11	14	15

Γ

4	5	6	7
12	13	14	15

Δ

8	9	10	11
12	13	14	15

12. Κάνε το παρακάτω ταχυδακτυλουργικό κόλπο σε μια φίλη σου. Παρουσίασέ της τις παραπάνω τέσσερις κάρτες.

    - Ζήτα από τη φίλη σου να βάλει στο νου της, χωρίς να σου αποκαλύψει, έναν αριθμό από το 1 ως το 15 και να σου πει σε ποιες κάρτες ο αριθμός αυτός εμφανίζεται. Εσύ δεν βλέπεις τις κάρτες από τη μεριά που είναι γραμμένοι οι αριθμοί, αλλά από την πίσω μεριά όπου είναι σημειωμένο μόνον το γράμμα που αντιστοιχεί στην κάρτα.
    - Όταν η φίλη σου πει σε ποιες κάρτες είναι ο αριθμός που έβαλε στον νου της, εσύ προσθέτεις γρήγορα και νοερά τους χαρακτηριστικούς αριθμούς των καρτών αυτών που είναι 1 για την Α, 2 για την Β, 4 για την Γ και 8 για την Δ. Το άθροισμα είναι ο αριθμός που έβαλε στο νου της η φίλη σου.
    - Πείσου ότι το κόλπο πετυχαίνει πάντα. Εξήγησε γιατί πετυχαίνει. (**Υπόδειξη:** Γράψε τους αριθμούς 1 ως 15 στο δυαδικό σύστημα. Τι παρατηρείς σε σχέση με τις παραπάνω κάρτες;)
    - Μπορεί να γίνει το ίδιο κόλπο με περισσότερους αριθμούς; Αν ναι, με ποιους; Πόσες κάρτες χρειάζονται τότε;