ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Εισαγωγή
- Συναρτήσεις, αντιστοιχίες
- Μερικές συναρτήσεις και ισοσταθμικές καμπύλες
- Όρια και συνέχεια συναρτήσεων $\mathbb{R}^n$

1 Εισαγωγή

Σε τούτο το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα βασικά στοιχεία των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών που είναι απαραίτητα για την ύλη του βιβλίου αυτού. Ειδικότερα, στην ενότητα 2 θα ασχοληθούμε με τις βασικές έννοιες των πολυμεταβλητών συναρτήσεων. Στην ενότητα 3 θα εξετάσουμε τις μερικές συναρτήσεις και τις ισοσταθμικές καμπύλες και στην ενότητα 4 θα παρουσιάσουμε τις σημαντικές έννοιες του ορίου και της συνέχειας μιας πολυμεταβλητής συνάρτησης.

2 Συναρτήσεις, αντιστοιχίες

Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $f: X \to Y$ είναι μια δυαδική σχέση (δηλαδή ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y = \{(x,y):\ x \in X,\ y \in Y\}$) από το σύνολο X που ονομάζεται και **σύνολο αφετηρίας** ή **πεδίο ορισμού** (*domain*) στο σύνολο Y που ονομάζεται **σύνολο άφιξης** (*codomain*), η οποία συμβολίζεται με $y = f(x)$ και έχει τις ιδιότητες:

(i) Τα X και Y είναι μη κενά σύνολα, δηλαδή $X \neq \varnothing$, και $Y \neq \varnothing$.

(ii) Κάθε στοιχείο x του X απεικονίζεται, ή μετασχηματίζεται, σε ένα και μόνο ένα στοιχείο $f(x) = y$ του Y, που ονομάζεται η **εικόνα** (*image*) ή η **τιμή** (*value*) της f στο x.

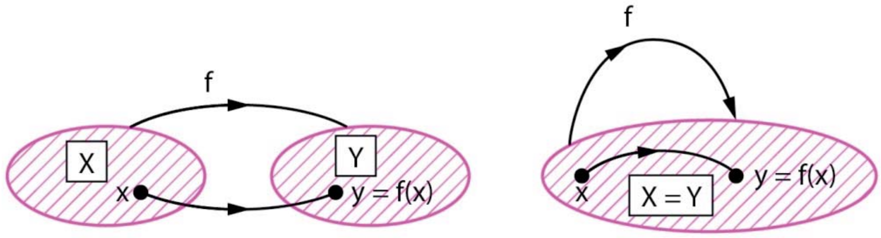
Ο συνολοθεωρητικός αυτός ορισμός, γενικεύει την έννοια της συνάρτησης $f: X \to Y$, από έναν αλγεβρικό τύπο, που εξαρτά στοιχεία y του Y από στοιχεία x του X, σε ένα σύνολο ζευγών (x, y) που έχουν τις ιδιότητες:

(i) για κάθε $x \in X \neq \varnothing$, υπάρχει ένα ζεύγος $(x,\ y = f(x))$ που ανήκει στην f, και

(ii) $y_1 = f(x),\ y_2 = f(x)$ αν και μόνο αν $y_1 = y_2$

Έτσι, f(x) είναι η τιμή της f στο x, και δεν είναι η συνάρτηση f όπως πολλές φορές εθιμικά συνηθίζεται να αναφέρεται. Συνεπώς, αν θέλουμε να αναφερθούμε στη συνάρτηση f θα πρέπει ή να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό της $y = f(x)$ ή τον συμβολισμό της απεικόνισης $x \to f(x)$ ή να γράψουμε απλά f.

Ειδικότερα, αν $X = Y$, τότε η συνάρτηση $f: X \to X$, ονομάζεται και **τελεστής** (*operator*). Μια συνάρτηση ή ένας τελεστής f μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά με τα εξής βελοειδή διαγράμματα.



Εικόνα συνόλου. Είναι συχνά σκόπιμο να γενικεύσουμε την έννοια της εικόνας f(x) ενός στοιχείου $x \in X$ στην **εικόνα ενός συνόλου** $A \subseteq X$, που συμβολίζεται με f(A), συνενώνοντας τις εικόνες των στοιχείων του A στο Y. Είναι δηλαδή

$$f(A) = \{ f(x) \in Y : x \in A \} = \bigcup_{x \in A} f(x)$$

Έτσι, το **σύνολο των εικόνων** ή των **τιμών** (*range*) μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ είναι το

$$f(X) = \{ f(x) \in Y : x \in X \} = \bigcup_{x \in X} f(x)$$

Η εικόνα f(A) ενός συνόλου $A \subseteq X$ έχει τις εξής βασικές ιδιότητες

$$f(\varnothing) = \varnothing \quad \text{και} \quad f(X) \subseteq Y$$

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$$

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= f(A_1) \cup f(A_2) \cup \ldots \cup f(A_n) \\ f(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \cap \ldots \cap f(A_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Το γράφημα μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ είναι το σύνολο

$$\{ (x,y) \in X \times f(X) : \; y = f(x) \}$$

Τέλος, οι όροι **απεικόνιση** (*mapping*) ή **μετασχηματισμός** (*transformation*) χρησιμοποιούνται συχνά ως συνώνυμα της συνάρτησης.

Μια ταξινόμηση συναρτήσεων

Ανάλογα με το αν τα σύνολα X και Y είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή του συνόλου των διατεταγμένων n−άδων (διανυσμάτων)

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{\text{n φορές}} = \left\{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \text{για κάθε } i=1,\ldots,n\right\}$$

διακρίνουμε τα εξής τέσσερα είδη συναρτήσεων $f: X \to Y$.

Πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Το X και το Y είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής** (*real function of a real variable*), και απεικονίζει κάθε πραγματικό αριθμό $x \in X$ σε ένα και μόνο έναν πραγματικό αριθμό $y = f(x)$ του $\mathbb{R}$. Στο διαφορικό λογισμό, οι συναρτήσεις αυτές αναφέρονται συνήθως ως συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και με τις οποίες ασχοληθήκαμε εκτενώς στον πρώτο τόμο.

Πραγματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής. Το X είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και Y είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τότε, η συνάρτηση $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής** (*real function of a vector variable*) και απεικονίζει κάθε σημείο (διάνυσμα) $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ του X σε ένα και μόνο ένα αριθμό $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ του $\mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις αυτές α-αναφέρονται συνήθως ως συναρτήσεις πολλών μεταβλητών στο διαφορικό λογισμό, και με τις οποίες ασχοληθήκαμε μερικώς στον πρώτο τόμο, και θα εξετάσουμε λεπτομερώς στον τόμο αυτό.

Παράδειγμα Έστω ότι, η παραγόμενη ποσότητα y ενός αγαθού απαιτεί $x_1,\ldots,x_n$ ποσότητες των $n>1$ συντελεστών παραγωγής. Τότε, η συνάρτηση παραγωγής $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, που εκφράζει την μέγιστη ποσότητα y που μπορεί να παραχθεί από τις ποσότητες $x_1,\ldots,x_n$ των n συντελεστών παραγωγής είναι μια πραγματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής. Μια τέτοια συνάρτηση που χρησιμοποιείται ευρέως στην οικονομική επιστήμη είναι η συνάρτηση Cobb-Douglas και έχει τη γενική μορφή $Q = Ax_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ με $x_1>0,\ldots,x_n>0$:

Διανυσματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής. Το X είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και το Y ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{f}: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **διανυσματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής** (*vector valued function of a vector variable*), και απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ του X σε ένα και μόνο ένα διάνυσμα $\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_m)$ του $\mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα Έστω ότι μια επιχείρηση παράγει $m>1$ προϊόντα, για την παραγωγή καθενός από τα οποία, χρησιμοποιούνται $n>1$ συντελεστές παραγωγής. Έστω ακόμη ότι, για να παραχθεί η ποσότητα y_i του προϊόντος $i=1,\ldots,m$, χρησιμοποιούνται οι ποσότητες $x_1,\ldots,x_n$ των $n>1$ συντελεστών παραγωγής σύμφωνα με τη συνάρτηση παραγωγής $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,m$. Τότε η συνάρτηση που εκφράζει την τεχνολογία παραγωγής της επιχείρησης είναι η διανυσματική συνάρτηση της διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}) \right]$$

όπου $\mathbf{y} = \left[y_1, \ldots, y_m \right]$, $\mathbf{f} = \left[f_1, \ldots, f_m \right]$, και $\mathbf{x} = \left[x_1, \ldots, x_n \right]$

και η οποία σύμφωνα με την ισότητα δύο διανυσμάτων, ισοδυναμεί με το σύστημα συναρτήσεων

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Δηλαδή κάθε μια από τις $f_1, \ldots, f_m$ συναρτήσεις είναι μια $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεις** (*component functions*) ή **συντεταγμένες συναρτήσεις** (*coordinate functions*) της $\mathbf{f} = [f_1, \ldots, f_m]$.

Επίσης, όπως συμβαίνει με κάθε διάνυσμα, το διάνυσμα **f** των συνιστωσών συναρτήσεων f_i μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων διανυσμάτων βάσης $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Έχουμε δηλαδή

$$\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + f_m \mathbf{e}_m$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{e}_i$ έχει μονάδα το $i-$οστό του στοιχείο και μηδέν κάθε άλλο στοιχείο.

Παράδειγμα Η συνάρτηση

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) = A x_1^{1/2} x_2^{1/3} x_3^2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = B x_1^2 x_2^{-1} x_3^{0,5} \end{pmatrix}$$

είναι μια $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ συνάρτηση και όπου κάθε μια από τις συνιστώσες συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2, x_3) = A x_1^{1/2} x_2^{1/3} x_3^2$ και $f_2(x_1, x_2, x_3) = B x_1^2 x_2^{-1} x_3^{0,5}$ είναι μια $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Επίσης η συνάρτηση αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα των συναρτήσεων

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) = A x_1^{1/2} x_2^{1/3} x_3^2 \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) = B x_1^2 x_2^{-1} x_3^{0,5} \end{aligned}$$

Παράδειγμα Ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης των n μεταβλητών γράφεται ως

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_1'(t) = \mathbf{f}_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= y_n'(t) = \mathbf{f}_n(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $\mathbf{y}(t)=\left[y_1'(t),\dots,y_n'(t)\right]$ είναι το διάνυσμα των χρονικών παραγώγων.

Στο πλαίσιο αυτό η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f}=[f_1,\dots,f_n]$ απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\mathbf{y}=[y_1,\dots,y_n]$ του $\mathbb{R}^n$ σε ένα και μόνο ένα διάνυσμα των χρονικών παραγώγων $\left[y_1'(t),\dots,y_n'(t)\right]$ του $\mathbb{R}^n$.

Διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Αν τώρα σε μια διανυσματική συνάρτηση διανυσματικών τιμών $\mathbf{f}:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ κάθε συνιστώσα συνάρτηση $f_1,\dots,f_m$ της **f** είναι συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής, της έστω $t\in\mathbb{R}$, τότε το X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και το **Y** είναι το $\mathbb{R}^m$. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση $\mathbf{f}:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής** (*vector valued function of a real variable*) και απεικονίζει κάθε πραγματικό αριθμό $t\in\mathbb{R}$ σε ένα και μόνο ένα σημείο

$$\mathbf{f}(t)=\left[f_1(t),\dots,f_n(t)\right]=\left[y_1,\dots,y_n\right]=\mathbf{y} \text{ του } \mathbb{R}^n$$

Όπως συμβαίνει και με τις διανυσματικές συναρτήσεις μιας διανυσματικής μεταβλητής, είναι σημαντικό να θεωρήσουμε ότι κάθε διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων διανυσμάτων βάσης $\mathbf{e}_i$ ως εξής:

$$\mathbf{f}(t)=f_1(t)\mathbf{e}_1+\dots+f_n(t)\mathbf{e}_n$$

Είναι λοιπόν η **f**(t) ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 1.

Επίσης, αν $X=[\alpha,\beta]$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, και οι συνιστώσες συναρτήσεις $f_1(t),\dots,f_n(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της t, τότε το σύνολο των σημείων

$$K=\left\{(f_1(t),\dots,f_n(t)):t\in X\right\}$$

ορίζει μια συνεχή καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ που ονομάζεται **παραμετρική καμπύλη** και η οποία εκφράζεται με το σύστημα των παραμετρικών εξισώσεων

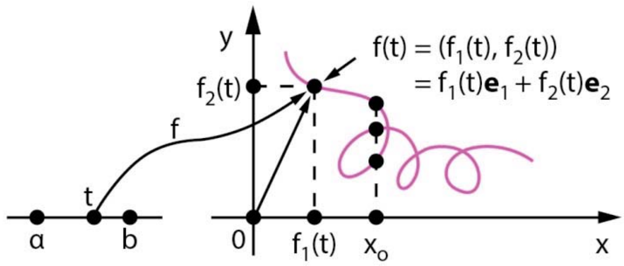
$$y_1=f_1(t),\ y_2=f_2(t),\ \dots,\ y_n=f_n(t)$$

Ερμηνεύοντας την **f**(t) ως ένα διάνυσμα που μας δίνει τη θέση ενός κινούμενου σημείου στο χώρο $\mathbb{R}^n$ τον χρόνο t, μπορούμε να μελετήσουμε εκτός της θέσης, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την απόσταση, και άλλα δυναμικά στοιχεία που συνοδεύουν την **f**(t).

Παράδειγμα

Μια λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (2) είναι μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)=\left[y_1(t),\dots,y_n(t)\right]$ της πραγματικής μεταβλητής t που είναι συνήθως ο χρόνος και της οποίας η παραμετρική καμπύλη της $K=\left\{(y_1(t),\dots,y_n(t)):\ t\in I=[\alpha,\beta]\right\}$ εκφράζει την χρονική τροχιά του αντίστοιχου δυναμικού συστήματος στο χρονικό διάστημα I.

Μια τέτοια τροχιά παρουσιάζεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1

Ως ένα ακόμη παράδειγμα η

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\theta) = \begin{bmatrix} f_1(\theta) = \alpha\cos\theta \\ f_2(\theta) = \alpha\sin\theta \end{bmatrix}, \text{ με } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

είναι μια $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ συνάρτηση και ορίζει παραμετρικά την καμπύλη του κύκλου με ακτίνα α και κέντρο το σημείο (0,0).

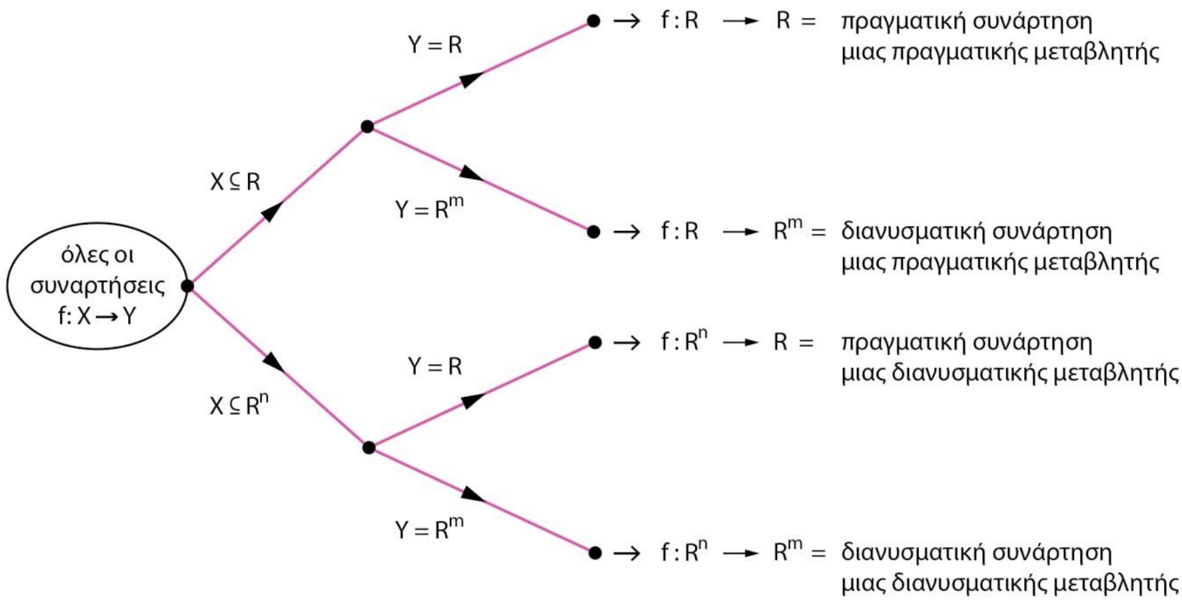
Εκτός της δυναμικής θεώρησης μιας συνάρτησης $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ υπάρχει και η στατική της θεώρηση που αφορά τη φύση της καμπύλης Κ, το μήκος της, και την καμπυλότητά της, μεταξύ άλλων. Έτσι οι διανυσματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής χρησιμοποιούνται επίσης στην μελέτη χαρακτηριστικών σημείων των γεωμετρικών τόπων.

Είναι σημαντικό το γεγονός ότι η παραμετρική καμπύλη που ορίζει μια συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ δεν παριστάνει γενικά μια συνάρτηση. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 η παραμετρική καμπύλη δεν μπορεί να εκφράσει καμιά συνάρτηση της μορφής $y = f(x)$, αλλά ούτε και $x = g(y)$, αφού για παράδειγμα στην τιμή x_0 αντιστοιχούν τρεις τιμές της y.

Αν τώρα έχουμε μια συνάρτηση $y = f(x)$ και θέλουμε να την παραμετροποιήσουμε, δηλαδή να την εκφράσουμε ως ένα ζεύγος παραμετρικών συναρτήσεων $\left(x = f_1(t),\ y = f_2(t)\right)$ θέτουμε $x = f_1(t)$ μια οποιαδήποτε συνάρτηση της t και την αντικαθιστούμε στην $y = f\left(f_1(t)\right)$ για να πάρουμε την $f_2(t)$.

Για παράδειγμα, αν $y = f(x) = 2x^2 + 5$, και θέσουμε $x = t$, τότε με αντικατάσταση στην f(x) παίρνουμε $y = f(t) = 2t^2 + 5$. Έτσι, ένα ζεύγος παραμετρικών συναρτήσεων που παραμετροποιεί την $y = f(x)$ είναι το $(x = t,\ y = 2t^2 + 5)$. Ένα ακόμη ζεύγος παραμετρικών συναρτήσεων που παραμετροποιεί την ίδια συνάρτηση $y = f(x)$, προκύπτει, αν θέσουμε $x = \sqrt{t}$, οπότε με αντικατάσταση στην $y = f(x)$ παίρνουμε το ζεύγος των συναρτήσεων $\left(x = \sqrt{t},\ y = 2t + 5\right)$.

Η παραπάνω ανάλυση παρουσιάζεται συνοπτικά στο δένδρο ταξινόμησης που ακολουθεί.



Βαθμωτές συναρτήσεις και Διανυσματικές συναρτήσεις

Τα τέσσερα παραπάνω είδη συναρτήσεων μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες ως εξής:

Βαθμωτές ή πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες απεικονίζουν πραγματικούς αριθμούς ή n−άδες πραγματικών αριθμών (διανύσματα) σε πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή, η βαθμωτές συναρτήσεις είναι οι πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και οι πραγματικές συναρτήσεις μια διανυσματικής μεταβλητής.

Διανυσματικές συναρτήσεις, οι οποίες απεικονίζουν πραγματικούς αριθμούς ή n−άδες πραγματικών αριθμών σε διανύσματα (n−άδες πραγματικών αριθμών). Δηλαδή, διανυσματικές συναρτήσεις είναι οι διανυσματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και οι διανυσματικές συναρτήσεις μιας διανυσματικής μεταβλητής.

Αντίστροφη συνάρτηση

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ της οποίας το πεδίο τιμών f(X) καλύπτει ένα μέρος του Y, δηλαδή $f(X) \subset Y$, τότε η f λέγεται ότι είναι μια **εντός συνάρτηση** (*into function*). Αντίθετα, αν $f(X) = Y$, τότε η f λέγεται ότι είναι μια **επί συνάρτηση** (*onto function*).

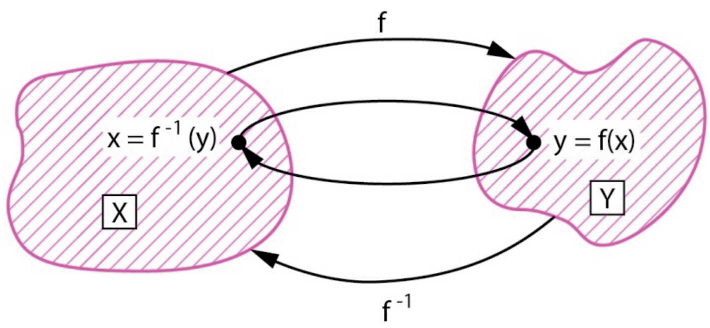
Ένα προς ένα συνάρτηση. Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται ότι είναι **ένα προς ένα** (*one to one function*), αν και μόνο αν κάθε y του f(X) είναι εικόνα ενός και μόνο ενός στοιχείου x του X. Δηλαδή

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Έστω τώρα ότι η $f: X \to Y$ είναι και τα δύο, ένα προς ένα και επί. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε την **αντίστροφη συνάρτηση** (*inverse function*) $f^{-1}: Y \to X$ της f, αφού η f^{-1} ικανοποιεί δύο συνθήκες (i) και (ii) μιας συνάρτησης ως εξής:

Για κάθε $y \in Y$ **υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο του X τέτοιο ώστε** $f(x) = y$**, οπότε ορίζουμε το** x **ως** $f^{-1}(y)$.

Με άλλα λόγια, η $f: X \to Y$ στέλνει (απεικονίζει) κάθε στοιχείο x του X στο f(x) του Y και η $f^{-1}: Y \to X$ ακυρώνει την πράξη αυτή της f, στέλνοντας το f(x) πίσω στο x, αφού $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ σύμφωνα με το σχήμα που ακολουθεί.



Αντίστροφη εικόνα συνόλου. Όπως ορίσαμε την εικόνα f(A) ενός συνόλου $A \subseteq X$, ορίζουμε για ένα σύνολο $B \subseteq Y$ την **αντίστροφη εικόνα** $f^{-1}(B)$ του B υπό την f, που ονομάζεται και **προ-εικόνα** του B, και που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του X που απεικονίζονται σε κάποιο y του B. Είναι δηλαδή

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) = y \in B\} = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y)$$

και έχει τις εξής βασικές ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \ \text{ και } \ f^{-1}(Y) = X \\
&B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \\
&f^{-1}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_n) \\
&f^{-1}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(B_n)
\end{aligned} \tag{3}$$

Με τις αντίστροφες συναρτήσεις διανυσματικών συναρτήσεων θα ασχοληθούμε στην τελευταία ενότητα του τρίτου κεφαλαίου.

Σύνθεση συναρτήσεων

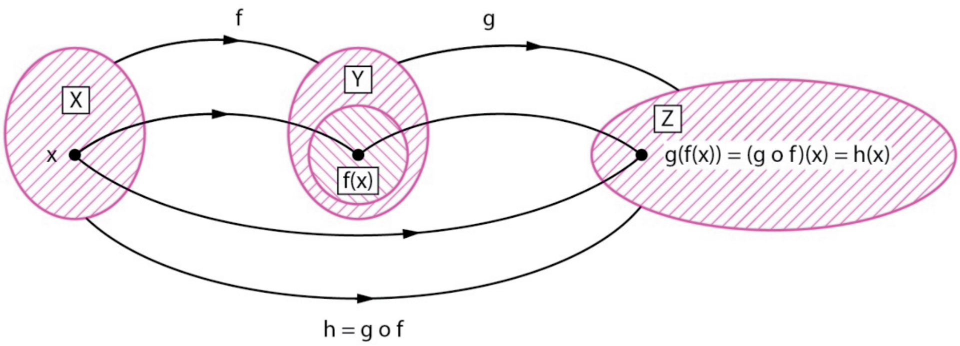
Οι ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1,...,x_n$ μια συνάρτησης $y = f(x_1,...,x_n)$ είναι συχνά συναρτήσεις άλλων ή και των ιδίων μεταβλητών. Ως ένα απλό παράδειγμα, έστω ότι κάθε μία από τις μεταβλητές $x_1,...,x_n$ είναι συνάρτηση αντίστοιχα $x_1(t),...,x_n(t)$ του χρόνου t. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $y = f(x_1(t),...,x_n(t)) = F(t)$ που εκφράζει την εξάρτηση της y από την t μέσω των $x_1,...,x_n$ είναι μια σύνθετη συνάρτηση.

Ειδικότερα, θυμίζουμε από τον πρώτο τόμο, ότι αν $f: X \to Y$ και $g: f(X) \to Z$ είναι δύο συναρτήσεις, τότε ορίζουμε μια συνάρτηση h από το X στο Z εφαρμόζοντας πρώτα την f που απεικονίζει κάθε στοιχείο x του X σε ένα και μόνο ένα στοιχείο f(x) του f(X), και μετά την g που απεικονίζει κάθε στοιχείο $y = f(x)$ του f(X) σε ένα μια μόνο ένα στοιχείο g(f(x)) του Z.

Σύνθετη συνάρτηση. Η συνάρτηση $h = g(f(x))$, $x \in X$,που προκύπτει, λέγεται ότι είναι η **σύνθετη συνάρτηση** των f και g και συμβολίζεται με $h = g \circ f$ ή απλά με gf. Έχουμε δηλαδή

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y), \text{ όπου } y = f(x)$$

όπως παριστάνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Παράδειγμα

Η συνάρτηση $h(x) = (x^2 - 1)^3$ είναι σύνθεση της $y = f(x) = x^2 - 1$ με την $z = g(y) = y^3$, αφού $h(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^3$.

Ομοίως, η $h(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ είναι σύνθεση της $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ με την

$z = g(y) = \sqrt{y}$, αφού

$$z = h(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

■

Για τις διανυσματικές συναρτήσεις, αν $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ μια συνάρτηση και $\mathbf{g}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ μια άλλη συνάρτηση, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια άλλη συνάρτηση.

Αναφορικά με τη σύνθεση συναρτήσεων παρατηρούμε τα εξής:

- Η σύνθεση της $f : X \to Y$ με την αντίστροφή της $f^{-1} : Y \to X$ μας δίνει

$$f^{-1} \circ f = I_X \quad \text{και} \quad f \circ f^{-1} = I_Y$$

  όπου I_X και I_Y είναι οι ταυτοτικές συναρτήσεις των X και Y αντίστοιχα. Θυμίζουμε ότι μια ταυτοτική συνάρτηση I_X σε ένα σύνολο X, απεικονίζει κάθε στοιχείο x του X στον εαυτό του, δηλαδή $f(x) = x$, και είναι επομένως μια συνάρτηση με άπειρα σταθερά σημεία.

- Η επαναληπτική σύνθεση της f με τον εαυτό της μας δίνει όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 16 την τροχιά που διαγράφει ένα σημείο ενός διακριτού δυναμικού συστήματος. Ειδικότερα, ένα διακριτό δυναμικό σύστημα είναι ένα σύνολο καταστάσεων X μαζί με έναν τελεστή $f : X \to X$ που περιγράφει την χρονική εξέλιξη του συστήματος, και όπου αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $\mathbf{x}^t$ τον χρόνο t, η κατάσταση $\mathbf{x}^{t+1}$ τον χρόνο $t+1$ περιγράφεται με την αναδρομική σχέση $\mathbf{x}^{t+1} = f(\mathbf{x}^t)$. Έτσι, αν το σύστημα ξεκινήσει με την κατάσταση $\mathbf{x}^0$, τότε η εξέλιξή του περιγράφεται με την επαναληπτική σύνθεση της f με τον εαυτό της ως εξής:

$$\mathbf{x}^1 = f(\mathbf{x}^0),\ \mathbf{x}^2 = f(\mathbf{x}^1) = f(f(\mathbf{x}^0)) = f^2(\mathbf{x}^0), \ldots,\ \mathbf{x}^{t+1} = f(\mathbf{x}^t) = f(f^{t-1}(\mathbf{x}^0)), \ldots$$

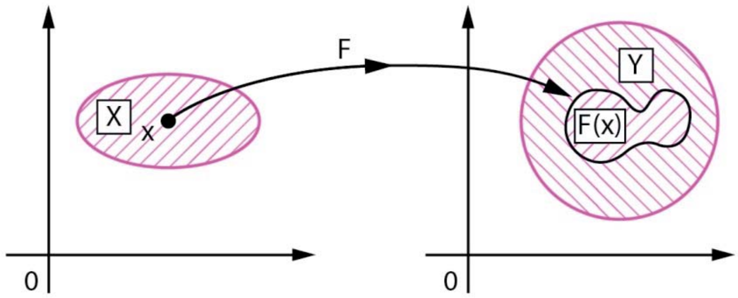
Πλειότιμες συναρτήσεις (Αντιστοιχίες)

Αν και η συνάρτηση είναι μια από τις πιο σημαντικές και ευρέως χρησιμοποιούμενες έννοιες στα μαθηματικά και τις εφαρμογές τους, εν τούτοις σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται η γενίκευσή της. Μια γενίκευση αναφέρεται στη χαλάρωση της συνθήκης (ii) του ορισμού της, όπου τουλάχιστον ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού της απεικονίζεται σε περισσότερα του ενός στοιχεία του πεδίου τιμών της.

Απεικόνιση σημείου προς σύνολο. Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται **πλειότιμη συνάρτηση** (*multivalued function*), ή **συνάρτηση συνολοτιμής** (*set value function*), ή **σημείο προς σύνολο απεικόνιση** (*point to set mapping*) ή **αντιστοιχία** (*correspondence*). Ειδικότερα, έχουμε τον εξής ορισμό:

Μια αντιστοιχία F από ένα μη κενό σύνολο X σε ένα μη κενό σύνολο Y έχει καθιερωθεί να συμβολίζεται με $F: X \longrightarrow\!\!\!\rightarrow Y$ **και είναι μια απεικόνιση** $X \to P(Y) =$ **το δυναμοσύνολο του Y που απεικονίζει κάθε** x **του** X **σε ένα υποσύνολο** Y_i **του** P(Y)**, έτσι ώστε τουλάχιστον ένα** Y_i **να περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία**.

Γεωμετρικά έχουμε το εξής σχήμα:



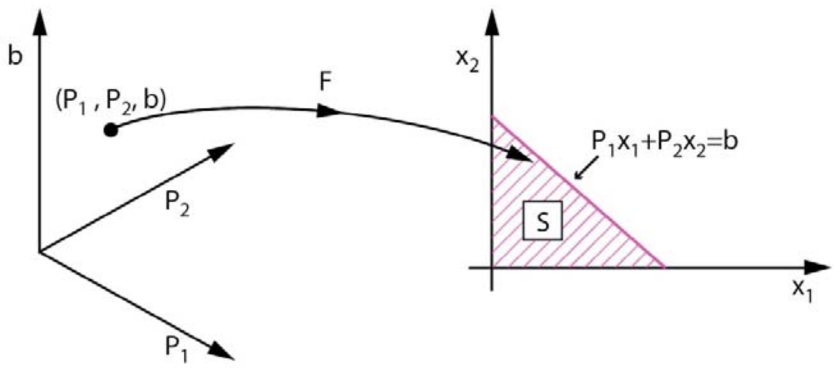
Ένα απλό παράδειγμα πλειότιμης συνάρτησης είναι η αντίστροφη συνάρτηση $y \to f^{-1}(x)$ μια συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι ένα προς ένα, επί παραδείγματι μια σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα Αν $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ οι τιμές των αγαθών 1 και 2 αντίστοιχα που αγοράζει ένας καταναλωτής και $b > 0$ το εισόδημα που διαθέτει για την αγορά των αγαθών αυτών, τότε (p_1, p_2, b) είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$. Επίσης, σε κάθε ένα τέτοιο σημείο αντιστοιχεί ένα σύνολο δυνατών καταναλωτικών ευκαιριών

$$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1x_1 + p_2x_2 \leq b,\ x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

που είναι η τιμή $F(p_1, p_2, b)$ μιας συνάρτησης F στο σημείο (p_1, p_2, b).

Έτσι η απεικόνιση $(p_1, p_2, b) \to F(p_1, p_2, b)$ ορίζει μια πλειότιμη συνάρτηση από ένα σύνολο μη αρνητικών σημείων του $\mathbb{R}^3$ στο σύνολο $\mathbb{R}^2$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί:



3 Μερικές συναρτήσεις και ισοσταθμικές καμπύλες

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με διάφορες διασπάσεις μιας $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτησης σε οικογένειες συναρτήσεων που παρουσιάζουν ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται μερικές συναρτήσεις, αν κρατήσουμε $n-1$ ανεξάρτητες μεταβλητές σταθερές και αφήσουμε μια από αυτές να μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$ και ισοσταθμικές καμπύλες, αν κρατήσουμε σταθερή την εξαρτημένη μεταβλητή και αφήσουμε κάθε μια από τις n ανεξάρτητες μεταβλητές να μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$. Ειδικότερα έχουμε:

Μερικές συναρτήσεις

Είναι συχνά χρήσιμο να κρατήσουμε τις τιμές των μεταβλητών $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ μιας συνάρτησης $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ σταθερές στα επίπεδα $x_1=x_1^0,\ldots,x_{i-1}=x_{i-1}^0,\ldots,x_n=x_n^0$ και να αφήσουμε μόνο τη μεταβλητή x_i να μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$. Παίρνουμε έτσι μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής

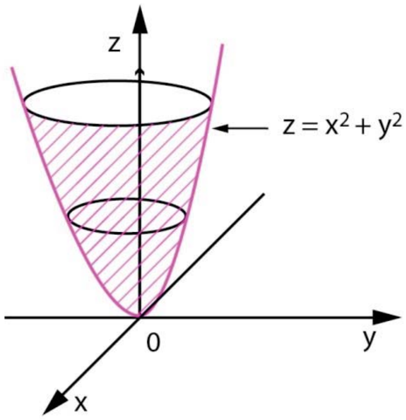
$$x_i \to f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)$$

που ονομάζεται **μερική συνάρτηση** (*partial function*) και η οποία περιγράφει πώς μεταβάλλεται η y όταν μεταβάλλεται μόνο η x_i και οι υπόλοιπες μεταβλητές x_j, παραμένουν σταθερές στα επίπεδα $x_j=x_j^0$, $j\neq i$.

Ceteris paribus

Με τον τρόπο αυτό, η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διασπάται σε n μερικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. Οι συναρτήσεις αυτές υλοποιούν την φράση του «κάθε άλλο παραμένει ίδιο ή ceteris paribus», που χρησιμοποιούν συχνά οι οικονομολόγοι και προφανώς όχι μόνο. Η παράγωγος μιας μερικής συνάρτησης ονομάζεται μερική παράγωγος, που αποτελεί βασικό εργαλείο μελέτης των πολυμεταβλητών συναρτήσεων και τις οποίες θα εξετάσουμε στο τρίτο κεφάλαιο. Η γεωμετρική ερμηνεία των μερικών συναρτήσεων περιορίζεται προφανώς στον χώρο των τριών διαστάσεων όπου για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών που κρατούνται σταθερές, τα γραφήματα των αντίστοιχων μερικών συναρτήσεων διαφέρουν κατά μια αθροιστική σταθερά και αποτελούν ως εκ τούτου παράλληλη μετατόπιση άλλων μερικών συναρτήσεων της ίδιας οικογένειας.

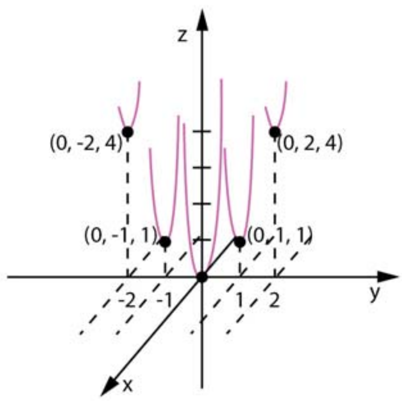
Παράδειγμα Θα παρουσιάσουμε τις μερικές συναρτήσεις της συνάρτησης $z = x^2 + y^2$ της οποίας το γράφημα $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ και } z = x^2 + y^2\right\}$ παριστάνει την επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Η τομή της επιφάνειας αυτής καθέτως με ένα επίπεδο $y = c$ μας δίνει το γράφημα της μερικής συνάρτησης $x \to f(x;c)$ που είναι μια παραβολή. Στον πίνακα αριστερά του σχήματος 3 παρουσιάζονται οι τύποι ορισμένων από αυτές τις συναρτήσεις $z = f(x;c)$ για διάφορες τιμές της c και στο σχήμα 3 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες καμπύλες τους που είναι παράλληλες μετατοπίσεις η μία της άλλης.

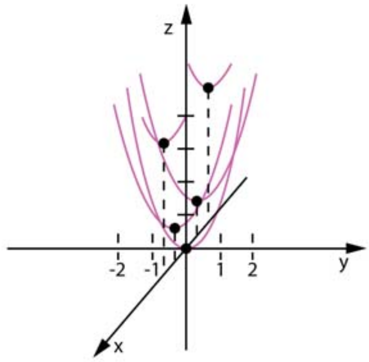
Επίπεδο $y = c$	$z = f(x,c)$
-2	$z = x^2 + 4$
-1	$z = x^2 + 1$
0	$z = x^2$
1	$z = x^2 + 1$
2	$z = x^2 + 4$



Σχήμα 3

Με τον ίδιο τρόπο η τομή της επιφάνειας του σχήματος 2 καθέτως με το επίπεδο $x=c$ μας δίνει μια καμπύλη που είναι επίσης παραβολή. Στον πίνακα αριστερά του σχήματος 4 παρουσιάζονται οι τύποι ορισμένων από αυτές τις συναρτήσεις $z=f(c;y)$ για διάφορες τιμές της c, τα αντίστοιχα γραφήματα των οποίων παρουσιάζονται στο σχήμα 4.

Επίπεδο $x=c$	$z=f(c,y)$
-2	$z=y^2+4$
-1	$z=y^2+1$
0	$z=y^2$
1	$z=y^2+1$
2	$z=y^2+4$



Σχήμα 4

Ισοϋψείς ή ισοσταθμικές καμπύλες

Μια άλλη διάσπαση της συνάρτησης $y=f(x_1,...,x_n)$ προκύπτει αν κρατήσουμε την εξαρτημένη μεταβλητή y σταθερή σε ένα από τα επίπεδα $y=\alpha_1, y=\alpha_2,...$ Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση f διασπάται στην οικογένεια των σχέσεων

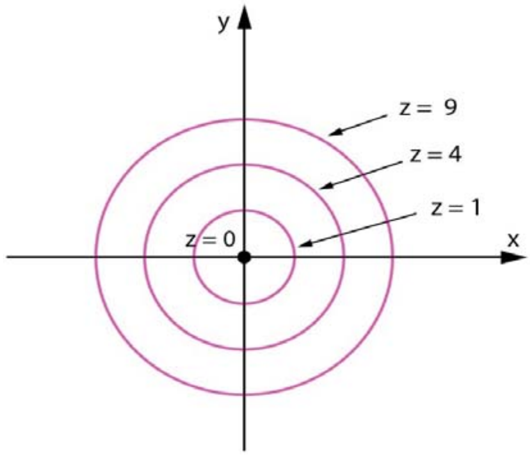
$$f(x_1,...,x_n)=\alpha_1,\ f(x_1,...,x_n)=\alpha_2,...$$

και τα σύνολα $I_{\alpha_i}=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ f(x_1,...,x_n)=\alpha_i\right\}$, $i=1,2,...$ ονομάζονται **ισοσταθμικές ή ισοϋψείς καμπύλες** (*level sets*) επειδή τα σημεία τους βρίσκονται στο ίδιο ύψος ή την ίδια στάθμη ή το ίδιο επίπεδο α_i. Δηλαδή I_{α_i} είναι το σύνολο όλων των $n-$άδων για τις οποίες η f έχει την ίδια τιμή α_i.

Για παράδειγμα, αν $Q=f(K,L)=K^{1/3}L^{2/3}$ είναι μια συνάρτηση παραγωγής, όπου Q η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος, K η ποσότητα του συντελεστή κεφάλαιο, και L η ποσότητα του συντελεστή εργασία και Q_0 μια τιμή της Q, τότε η σχέση $K^{1/3}L^{2/3}=Q_0$ ορίζει το σύνολο όλων των συνδυασμών κεφαλαίου και εργασίας που δίνουν την ίδια ποσότητα παραγωγής Q_0.

Η γεωμετρική παράσταση των ισοϋψών καμπυλών περιορίζεται στον χώρο $\mathbb{R}^3$ όπου το γράφημά τους $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)=z_0\right\}$ αποτελεί την οριζόντια τομή της επιφάνειας της f με το επίπεδο $z = z_0$ και την προβολή της στο επίπεδο xy.

Παράδειγμα Για τη συνάρτηση $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ το γράφημα της οποίας παρουσιάζεται στο σχήμα 3, οι ισοϋψείς καμπύλες για $z = 1$, $z = 4$ και $z = 9$ είναι ομόκεντροι κύκλοι που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5

Στην οικονομική επιστήμη οι ισοσταθμικές παρουσιάζουν όπως θα δούμε ιδιαίτερο ενδιαφέρον, και τους έχουν δοθεί διάφορες ονομασίες, ανάλογα με το είδος του οικονομικού μεγέθους που εκφράζουν. Έτσι έχουμε:

- **Καμπύλες ίσης ποσότητας** (*isoquant*) για συναρτήσεις παραγωγής
- **Καμπύλες ίσης χρησιμότητας** (*iso-ubility curves*) ή **καμπύλες αδιαφορίας** (*indifference curves*) για συναρτήσεις χρησιμότητας
- **Καμπύλες ίσου κέρδους** (*iso-profit curves*) για συναρτήσεις κέρδους, κ.λπ.

Τέλος, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 4, οι $f(x_1,...,x_n) = y_i$, που γράφονται και ως $F(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n) - y_i = 0$ είναι απλά σχέσεις, για τις οποίες μπορεί να υπάρχουν ή να μην υπάρχουν συναρτήσεις που εκφράζουν την μια από τις μεταβλητές $x_1,...,x_n$, την έστω x_1, ως συνάρτηση $x_1 = g(x_2,...,x_n)$ των υπολοίπων $x_2,...,x_n$. Στην περίπτωση που αυτό συμβαίνει, λέμε ότι η σχέση $F(x_1,...,x_n) = 0$ ορίζει την ενδογενή μεταβλητή x_1 ως μια **πλεγμένη συνάρτηση** (*implicit function*) των εξωγενών μεταβλητών $x_2,...,x_n$. Οι πλεγμένες συναρτήσεις αποτελούν μια γενίκευση των μη πλεγμένων συναρτήσεων αφού κάθε μια από αυτές μπορεί να γραφεί σε μορφή πλεγμένης συνάρτησης. Επιπλέον, επειδή οι πλεγμένες συναρτήσεις είναι αυτές που εμφανίζονται κατά κανόνα στην πράξη, θα αφιερώσουμε το μεθεπόμενο κεφάλαιο στην αναλυτική εξέτασή τους.

4 Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

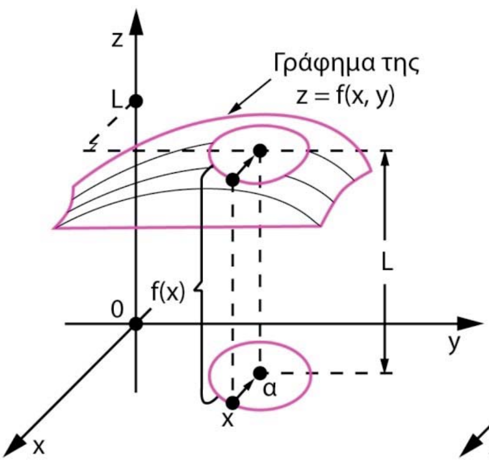
Όπως και με τις συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, η γνώση της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης σε μια γειτνίαση ενός σημείου συσσώρευσης του πεδίου ορισμού τους αποτελεί σημαντική πληροφορία. Θα ξεκινήσουμε με την έννοια του ορίου που αποτελεί σημαντικό εργαλείο, χρήσιμο για τον ορισμό της συνέχειας συναρτήσεων, της παραγώγου, και γενικά για τη μελέτη σημαντικών χαρακτηριστικών των συναρτήσεων.

Το όριο μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

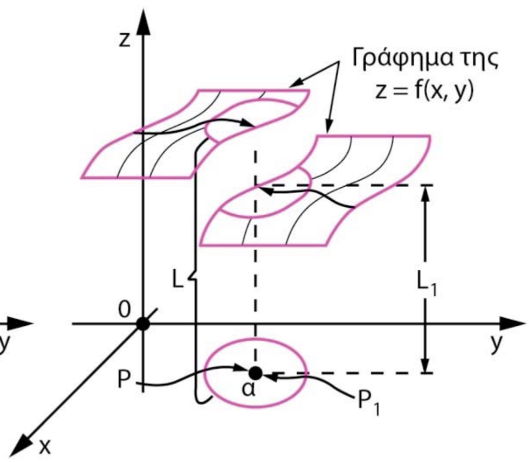
Στις συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής το σημείο x προσεγγίζει το σημείο α μέσω τιμών που βρίσκονται αριστερά ή δεξιά του α. Αντίθετα, στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών το σημείο **x** προσεγγίζει ένα σημείο **α** μέσω απείρως πολλών διαφορετικών μονοπατιών.

Έτσι, όταν γράφουμε $\lim f(\mathbf{x}) \to L$, καθώς $\mathbf{x} \to \alpha$, θα εννοούμε ανεξάρτητα του μονοπατιού που χρησιμοποιεί το x για να προσεγγίσει το α.

Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 6. Στην περίπτωση που η οριακή τιμή L αλλάζει όταν το **x** προσεγγίζει το **α** μέσω κάποιου άλλου μονοπατιού, λέμε ότι το όριο δεν υπάρχει. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 7, όπου έχουμε $\lim f(\mathbf{x}) \to L$ καθώς το **x** τείνει στο **α** κατά μήκος του μονοπατιού P και $\lim f(x) \to L_1 \neq L$ καθώς το **x** τείνει στο **α** κατά μήκος ενός άλλου μονοπατιού του P_1. Επομένως, στο σχήμα 7 $\lim f(\mathbf{x})$ καθώς $\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}$ δεν υπάρχει και όπως παρατηρούμε η επιφάνεια παρουσιάζει ένα ρήγμα στο σημείο αυτό.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν η συνάρτηση $z = f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x+y}$ έχει όριο καθώς $(x,y) \to (0,0)$.

Λύση. Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο (x, y) προσεγγίζει το (0, 0) κατά μήκος του άξονα των x, θέτουμε $y = 0$ και παίρνουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}0}{x} = 0 \qquad (4)$$

Με τον ίδιο τρόπο αν θεωρήσουμε ότι το σημείο (x, y) προσεγγίζει το (0, 0) κατά μήκος του άξονα των y, θέτουμε $x = 0$ και παίρνουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x+y} = \lim_{y\to 0} \frac{0\sqrt{y}}{y} = 0 \qquad (5)$$

Όταν όμως το σημείο (x,y) προσεγγίζει το (0,0) μέσω της ευθείας $x = y$, βρίσκουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2} \qquad (6)$$

Από το γεγονός ότι τα όρια (4), (5) και (6) δεν συμπίπτουν, συμπεραίνουμε ότι το όριο $\lim \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x+y}$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

Ο ε—δ ορισμός του ορίου

Θυμίζουμε ότι, στις μονομεταβλητές πραγματικές συναρτήσεις με την ισότητα $\lim f(x) = L$, καθώς $x \to x_0$ εννοούμε ότι, όταν το x είναι ικανοποιητικά κοντά στο x_0, τότε η f(x) θα βρίσκεται τόσο κοντά στο L όσο επιθυμούμε. Οι προτάσεις "x είναι ικανοποιητικά κοντά στο $\mathbf{x}_0$" και "f(**x**) θα είναι κοντά στο L όσο επιθυμούμε" για μια συνάρτηση $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ εκφράζεται με πιο αυστηρό τρόπο ως εξής:

Η ισότητα $\lim f(\mathbf{x}) = L$ καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ ή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = L$ σημαίνει ότι, για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας άλλος αριθμός $\delta > 0$ που μετρά πόσο κοντά το x βρίσκεται προς το $\mathbf{x}^0$ και που εξαρτάται από τον ε, τέτοιος ώστε

$$\text{οποτεδήποτε} \quad 0 < \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \right\| < \delta, \quad \text{έχουμε} \quad \left| f(\mathbf{x}) - L \right| < \varepsilon \qquad (7)$$

Σημείωση

Όταν λέμε «η οριακή τιμή της **f** στο $\mathbf{x}^0$» κάνουμε την υπόθεση ότι το $\mathbf{x}^0$ μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο X.

Παράδειγμα Να εφαρμοστεί ο παραπάνω ορισμός για να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{9-x^2-y^2} = 3 \tag{8}$$

Λύση. Έχουμε $L=3$ και $\mathbf{x}^0=(0,0)$. Η πρώτη ανίσωση της (7) γίνεται

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \tag{9}$$

Με τον ίδιο τρόπο η δεύτερη ανίσωση της (7) γίνεται:

$$\left|\sqrt{9-x^2-y^2}-3\right| < \varepsilon \quad \text{ή} \quad 3-\sqrt{9-x^2-y^2} < \varepsilon$$

$$\text{ή} \quad \sqrt{9-x^2-y^2} > 3-\varepsilon \tag{10}$$

Λύνοντας την ανισότητα (10) ως προς τον όρο του ριζικού παίρνουμε

$$9-(x^2+y^2) > (3-\varepsilon)^2 \quad (\text{υποθέτουμε } \varepsilon < 3)$$

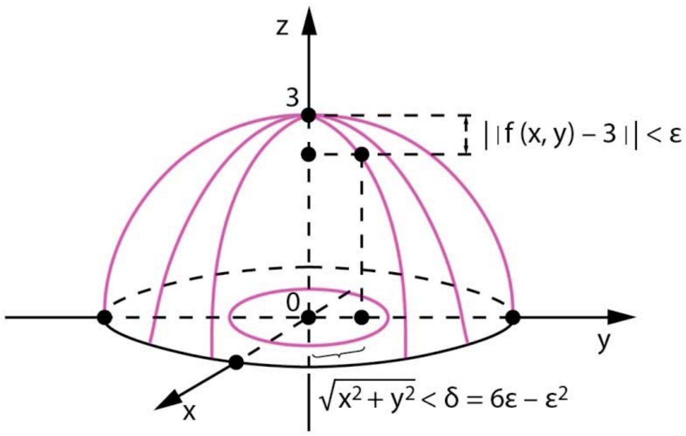
$$\text{ή} \quad x^2+y^2 < 6\varepsilon-\varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{6\varepsilon-\varepsilon^2} \tag{11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι $0<\varepsilon<3$ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός. Αν ορίσουμε τον αριθμό δ να είναι $\delta=\sqrt{6\varepsilon-\varepsilon^2}$, τότε η (11) ικανοποιείται οποτεδήποτε ισχύει η ανισότητα (9). Το γεγονός ότι η (11) είναι ισοδύναμη προς την (10) συνεπάγεται ότι

$$\left|\sqrt{9-x^2-y^2}-3\right| < \varepsilon \quad \text{όταν} \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

αποδεικνύοντας έτσι το όριο (8).

Το όριο αυτό παρουσιάζεται γεωμετρικά στο σχήμα που ακολουθεί.



Σημείωση Ο ορισμός (6) έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα αφού παρέχει μια διαδικασία απόδειξης μιας υποτιθέμενης τιμής L ως οριακής τιμής και δεν δίνει καμιά πληροφορία πώς να βρούμε την L. Έτσι, όταν θέλουμε να βρούμε οριακές τιμές, χρησιμοποιούμε τον διαισθητικό ορισμό του ορίου, που αν και λιγότερο αυστηρός του $\varepsilon-\delta$ ορισμού είναι πιο αποτελεσματικός.

Το όριο μιας συνάρτησης $\mathbf{f}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Ο ορισμός του ορίου μιας συνάρτησης $\mathbf{f}=[f_1,\dots,f_n]:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ίδιος με τον ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης $\mathbf{f}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με την μόνη διαφορά ότι η τιμή L αντικαθίσταται με το $\boldsymbol{\alpha}$ που όπως και η διαφορά $\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\alpha}$ είναι σημεία του $\mathbb{R}^m$. Έτσι, η δεύτερη ανίσωση της (7) ισούται με τη νόρμα $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\alpha}\|\le\varepsilon$, όπου $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ είναι το οριακό σημείο.

Έτσι, η σχέση (7) γίνεται

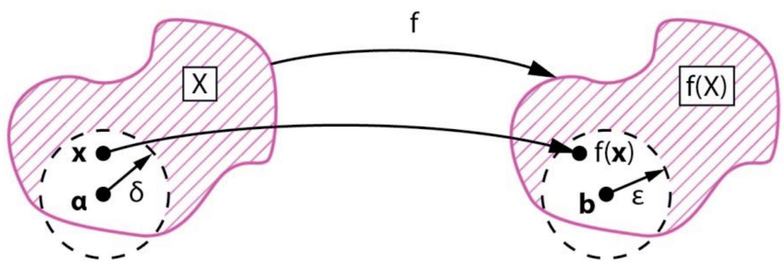
$$\text{οποτεδήποτε } 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|<\delta \quad \text{έχουμε} \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\alpha}\|\le\varepsilon$$

Γενικά για τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\ X\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, και τα σημεία $\boldsymbol{\alpha}\in X$ και $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, η ισότητα $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x})=\mathbf{b}$ σημαίνει το εξής:

Για κάθε περιοχή $N(\mathbf{b})$ γύρω από το σημείο $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ υπάρχει μια περιοχή $N(\boldsymbol{\alpha})$ γύρω από το $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχει αναγκαστικά το $\boldsymbol{\alpha}$, τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}\in N(\boldsymbol{\alpha})\cap X \quad \text{συνεπάγεται} \quad f(\mathbf{x})\in N(\mathbf{b})$$

Ο ορισμός αυτός παρουσιάζεται γεωμετρικά στο σχήμα που ακολουθεί:



Για τον υπολογισμό των ορίων μιας συνάρτησης $\mathbf{f}:\ X\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ισχύει το εξής θεώρημα των συνιστωσών:

Μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = (f_1,...,f_m): X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ έχει στο σημείο $\mathbf{x}^0 = (x_1^0,...,x_n^0) \in X$ οριακή τιμή $\mathbf{y} = (y_1,...,y_n \in \mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f_i(\mathbf{x}) = y_i, \quad i = 1,...,n$$

Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Η συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται στη συμπεριφορά τους τοπικά και είναι ανάλογη αυτής των μονομεταβλητών συναρτήσεων. Ειδικότερα έχουμε:

Μια συνάρτηση $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο $\mathbf{x}^0 \in X$, αν

(i) $f(\mathbf{x}^0)$ ορίζεται, (ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει, και (iii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ είναι ασυνεχής στο σημείο (0,0) αφού στο σημείο αυτό η f δεν ορίζεται. Αντίθετα, η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ είναι συνεχής στο (0,0), αφού $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0-x^2-y^2} = 3 = f(0,0)$. ■

Για τη συνέχεια, όπως και με τα όρια ισχύει το εξής θεώρημα των συνιστωσών:

Θεώρημα των συνιστωσών. Μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = (f_1,...,f_n)$ είναι συνεχής στο σημείο $\mathbf{x}^0$ αν και μόνο αν κάθε μια από τις συνιστώσες συναρτήσεις f_i, $i = 1,...,n$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}^0$.

■

Η σημασία της συνέχειας σε οικονομικά μοντέλα

Η συνέχεια παίζει σημαντικό ρόλο στα οικονομικά μοντέλα, αφού όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, μαζί με τις ιδιότητες της κυρτότητας και της συμπαγιότητας μας εξασφαλίζουν μεταξύ άλλων

(i) Την ύπαρξη βέλτιστων σημείων, σε υποδείγματα βελτιστοποίησης, και

(ii) Την ύπαρξη σταθερών σημείων σε δυναμικά υποδείγματα και σε υποδείγματα γενικής οικονομικής ισορροπίας.

Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων

Η συνέχεια είναι μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα ιδιότητα, της οποίας όμως η άμεση απόδειξη αποτελεί μια συνήθως δύσκολη διαδικασία. Η διαδικασία όμως αυτή διευκολύνεται ουσιωδώς, αν γνωρίζουμε ποια είδη συνδυασμών συνεχών συναρτήσεων παράγουν συνεχείς συναρτήσεις. Στο πλαίσιο αυτό ισχύει το εξής θεώρημα:

(i) Αν $f_i : X \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,...,n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο X, και $\alpha_i \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ είναι επίσης συνεχής συνάρτηση στο X.

(ii) Αν $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο X, τότε η συνάρτηση $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$ είναι επίσης συνεχής συνάρτηση στο X.

(iii) Αν $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο X, τότε και η $F : 1/f$ είναι επίσης συνεχής στο X υπό την προϋπόθεση ότι $f(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

(iv) Αν $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο X, τότε και η συνάρτηση $\max_i \{f_i(\mathbf{x})\}$ και $\min_i \{f_i(\mathbf{x})\}$ είναι επίσης συνεχής στο X.

Ως άμεση συνεπαγωγή του παραπάνω θεωρήματος έχουμε το εξής πόρισμα:

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι μια συνεχής συνάρτηση.
- Η συνάρτηση Cobb-Douglas $y = f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$ με $0 < \alpha_i < 1$ για κάθε i και $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, που στη συνέχεια αυτού του βιβλίου αυτού χρησιμοποιείται ευρέως στις οικονομικές και διοικητικές επιστήμες, είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Τέλος, σημεία ασυνέχειας πολυμεταβλητών συναρτήσεων παρουσιάζονται για τους συνήθεις λόγους, όπως όταν ο παρονομαστής γίνεται μηδέν, ή μια παράσταση κάτω από ένα ριζικό άρτιας τάξης γίνεται αρνητική, κ.λπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω η συνάρτηση $f: X \to Y$ και $\{X_i : i \in I\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Να αποδειχθούν ότι

$$f(\cup X_i;\ i \in I) = \cup f(X_i),\ i \in I, \text{ και}$$

$$f(\cap X_i;\ i \in I) \subseteq \cap f(X_i),\ i \in I$$

2. Έστω η συνάρτηση $f: X \to Y$ και $\{B_i : i \in I\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y. Να αποδειχθούν ότι

$$f^{-1}(\cup B_i;\ i \in I) = \cup f^{-1}(B_i),\ i \in I$$

$$f^{-1}(\cap B_i;\ i \in I) = \cap f^{-1}(B_i),\ i \in I$$

3. Έστω η συνάρτηση $f: X \to Y$, A_1, A_2 υποσύνολα του X και B_1, B_2 υποσύνολα του Y. Να αποδειχθούν ότι

(i) $f^{-1}(\overline{B}_1) = \overline{(f^{-1}(B_1))}$

(ii) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$

4. Έστω η συνάρτηση $f: X \to Y$, A ένα υποσύνολο του X και B ένα υποσύνολο του Y. Να αποδειχθεί ότι $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ και $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

5. Έστω $f_1 : X_1 \to Y_2$, $f_2 : X_2 \to Y_3, \ldots, f_n : X_n \to X_{n+1}$ είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_{n+1}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\left(f_n \circ \ldots \circ f_2\right) \circ f_1 = f_n \circ \left(f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1\right)$$

6. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από

$$y = f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\dfrac{e^{x_1 x_2}}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\dfrac{\sqrt{\alpha - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{e^{x_1 x_2 \sqrt{x_3}}}} \right)$$

7. Να μετατραπεί κάθε ένα από τα ζεύγη των παραμετρικών συναρτήσεων

(i) $y_1 = f_1(t) = t + 1$ και $y_2 = f_2(t) = 2t^2 - 3$

(ii) $y_1 = f_1(t) = t^2 - 2$ και $y_2 = f_2(t) = t^2 + 1$

σε μια συνάρτηση της μορφής $y_2 = f(y_1)$.

8. Να αποδειχθεί ότι δύο διαφορετικές ισοσταθμικές μιας συνάρτησης $z=f(x,y)$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της f δεν τέμνονται.

9. Να αποδειχθεί ότι όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν $xy=3$ βρίσκονται στην ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης

$$z=f(x,y)=\frac{3(xy+1)^2}{x^4y^4-1}$$

10. Να αποδειχθεί ότι $x^2+y^2=6$ είναι μια ισοσταθμική της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2+2$ και ότι όλες οι ισοσταθμικές της f πρέπει να είναι κύκλοι με κέντρο την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων.

11. Να δειχθεί ότι $x^2+y^2=\alpha$ για κάθε τιμή της παραμέτρου α κείται στην ισοσταθμική της $z=f(x,y)=e^{x^2}e^{-y^2}+x^4-2x^2y^2+y^4$.

12. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από $f(x,y)=xy^2$. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{(2,3)} f(x,y)=18$.

13. Να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής είναι συνεχής

$$y=\mathbf{f}(t)=\left(\frac{1}{t},\ t^2,\ \frac{2}{t^2-4}\right)$$

14. Να προσδιοριστούν τα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1^2x_2+8x_1^2x_2^5x_3-x_1x_2+8x_3 \\ \dfrac{x_1x_2-3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2-4} \end{pmatrix}$$

στα οποία είναι συνεχής.