Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες Πιθανότητας

- Αβεβαιότητα, Τυχαία Διαδικασία, και Συναφείς Έννοιες
- Πράξεις και Σχέσεις Γεγονότων
- Χώρος Γεγονότων – Δυναμοσύνολο
- Η Έννοια της Πιθανότητας
- Αξιώματα και Θεωρήματα Πιθανότητας
- Αρχές Απαρίθμησης
- Περίληψη Κεφαλαίου
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε τον τύπο των φαινομένων, με τον οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτό το βιβλίο. Επί πλέον θα αναπτύξουμε μαθηματικά μοντέλα με τα οποία θα περιγράφουμε και διερευνούμε τέτοια φαινόμενα.

Γενικά, μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών μοντέλα τα ***καθοριστικά*** και τα ***στοχαστικά.*** Τα καθοριστικά μοντέλα περιγράφουν φαινόμενα των οποίων οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται καθορίζουν και το αποτέλεσμα της έκβασής τους. Για παράδειγμα, αν τοποθετήσουμε μία μπαταρία σε ένα απλό κύκλωμα, το μαθηματικό μοντέλο, το οποίο ενδεχομένως θα περιέγραφε την παρατηρούμενη ροή ρεύματος θα ήταν ο νόμος του Ohm $I = E/R$. Ο νόμος προβλέπει την τιμή της έντασης του ρεύματος όταν είναι γνωστά η αντίσταση R και η δύναμη της μπαταρίας E. Όσες φορές και εάν επαναλάβουμε αυτό το πείραμα, κάθε φορά παρατηρούμε την ίδια ένταση I.

Υπάρχουν πολλά φαινόμενα, τα οποία περιγράφονται πλήρως από καθοριστικά μοντέλα. Παρόλα αυτά, υπάρχουν επίσης πολλά άλλα φαινόμενα, τα οποία περιγράφονται από ***στοχαστικά*** ή ***πιθανοτικά*** μοντέλα. Για παράδειγμα, η ένταση της βροχής που πρόκειται να ακολουθήσει σε ένα τόπο δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Υπάρχουν καθοριστικά μετεωρολογικά μοντέλα, τα οποία περιέχουν τις επικρατούσες συνθήκες όπως βαρομετρική πίεση, διεύθυνση, και ένταση ανέμου και άλλες παρατηρούμενες παραμέτρους, αλλά προβλέπουν **μόνο** χαμηλή ή υψηλή ένταση βροχής στον τόπο και όχι την ακριβή της τιμή. Τέτοια φαινόμενα περιγράφονται καλύτερα από στοχαστικά μοντέλα, τα οποία λαμβάνοντας υπόψη τις επικρατούσες συνθήκες προβλέπουν **πιθανολογικά** τα διάφορα δυνατά αποτελέσματα. Με άλλα λόγια τα στοχαστικά μοντέλα προβλέπουν με κάποια αβεβαιότητα την έκβαση του φαινομένου. Την **αβεβαιότητα** αυτή μετρά μεθοδολογικά η **Θεωρία Πιθανοτήτων.**

Η στατιστική, σαν μια μέθοδο *λήψης απόφασης* κάτω από συνθήκη αβεβαιότητας, βασίζεται στην πιθανοθεωρία, αφού πιθανότητα είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας και των ρίσκων που σχετίζονται μ' αυτή. Προτού μάθει κανείς στατιστικές διαδικασίες απόφασης απαιτείται μία γνώση της πιθανοθεωρίας.

Ένας εύκολος και ξεκάθαρος τρόπος μεταχείρισης της *πιθανοθεωρίας* απαιτεί μερική γνώση της *συνολοθεωρίας*. Προκειμένου να μελετήσουμε τα *πιθανοκρατικά πρότυπα* που επιθυμούμε να αναπτύξουμε, θα ήταν πολύ κατάλληλο αν πρώτα γνωρίζαμε τις βασικές έννοιες από την θεωρία συνόλων.

2.1 ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ, ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ, ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Βασικά, η ανάπτυξη της πιθανοθεωρίας στηρίζεται στις τρεις έννοιες του **δειγματοχώρου**, **δειγματοσημεία**, και **γεγονότα**, οι οποίες σχετίζονται με την αβεβαιότητα και το πείραμα τύχης.

2.1.1 Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα

Η **αβεβαιότητα** αναφέρεται στην έκβαση ενός φαινομένου υπό εξέλιξη. Εάν ένα φαινόμενο υπό εξέλιξη μπορεί να οδηγήσει σε δύο ή περισσότερα πιθανά αποτελέσματα, το φαινόμενο είναι ***στοχαστικό*** και τα αποτέλεσμα λέγεται ότι είναι ***αβέβαιο.*** Έτσι, ρίχνοντας ένα ζάρι ή νόμισμα, μετρώντας την διάρκεια μιας μπαταρίας, μετρώντας τον αριθμό αυτοκινήτων πριν συμβεί ένα ατύχημα, ερωτώντας έναν ψηφοφόρο εάν προτιμά ή όχι ένα συγκεκριμένο υποψήφιο, και ούτω καθ' εξής, όλα είναι στοχαστικά φαινόμενα, αφού σε κάθε περίπτωση, η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερα από δύο πιθανά αποτελέσματα.

○○● Ορισμός

Ένα στοχαστικό φαινόμενο θα το ονομάζουμε **τυχαίο πείραμα** αν,

1. η εξέλιξη του φαινομένου μπορεί να πραγματοποιηθεί όσες φορές επιθυμούμε,
2. η εξέλιξη του φαινομένου πραγματοποιείται πάντα υπό τις ίδιες συνθήκες,
3. η προ-εκδίκαση του αποτελέσματος μιας συγκεκριμένης εξέλιξης του φαινομένου δεν είναι δυνατή,
4. το σύνολο των αβέβαιων αποτελεσμάτων της εξέλιξης του φαινομένου είναι γνωστό.

○○●

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, όταν αναφερόμαστε σε πείραμα τύχης μπορεί να εννοούμε και ένα φυσικό πείραμα, το οποίο μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ή, μπορεί απλά να διανοηθεί ένα σύνολο από αβέβαια αποτελέσματα, χωρίς να πραγματοποιηθεί καμία ακολουθία από επαναλαμβανόμενες δοκιμές. Για ένα πείραμα τύχης, πραγματικό ή φανταστικό, το μόνο που χρειάζεται είναι να προσδιορισθούν ακριβώς όλα τα πιθανά αποτελέσματα.

2.1.2 Δειγματοχώρος και Δειγματοσημεία

○○● Ορισμός

Ένα σύνολο, του οποίου τα στοιχεία παριστάνουν όλα τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, ονομάζεται **δειγματοχώρος,** ο οποίος είναι ένα γενικό (*universal*) σύνολο και συμβολίζεται με ***S***. Τα πιθανά αποτελέσματα στον δειγματοχώρο ονομάζονται **δειγματοσημεία** και συμβολίζονται με ***s***, ο δε αριθμός δειγματοσημείων σ' ένα δειγματοχώρο μπορεί να συμβολιστεί με ***N*(*S*)**.

Στη συνέχεια αναφέρονται τυχαία πειράματα ***E*** και οι αντίστοιχοι δειγματοχώροι ***S***.

○○●

Παραδείγματα

2.1 E_1: Ένα τεμάχιο επιλέγεται από ένα κιβώτιο εισερχόμενου εμπορεύματος και ελέγχεται. Το τεμάχιο μπορεί να είναι ελαττωματικό, D, ή μη ελαττωματικό, $\bar{D}$.

$$S=\{D,\ \bar{D}\}$$

◆◆◆

2.2 E_2: Ρίχνουμε τρία νομίσματα και παρατηρούμε τις ενδείξεις τους. Ο δειγματικός χώρος S του πειράματος αυτού αποτελείται ως γνωστόν από όλα τα δυνατά ενδεχόμενα,

$$S = \{KKK,\ KK\Gamma,\ K\Gamma K,\ \Gamma KK,\ K\Gamma\Gamma,\ \Gamma K\Gamma,\ \Gamma\Gamma K,\ \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

◆◆◆

2.3 E_3: Ένας εργολάβος ξεκινά ένα μεγάλο χωματουργικό έργο με τρεις μπουλντόζες A_1, A_2 και A_3. Μετά από ένα χρόνο ελέγχουμε την κατάσταση των τριών μπουλντόζων. Αν A_κ και $\bar{A}_\kappa$ είναι τα ενδεχόμενα ότι η A_κ μπουλντόζα παρουσιάζει ή δεν παρουσιάζει βλάβη αντίστοιχα, τότε ο δειγματοχώρος S της κατάστασης των μπουλντόζων είναι

$$S=\left\{A_1A_2A_3,\ \bar{A}_1A_2A_3,\ A_1\bar{A}_2A_3,\ A_1A_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2A_3,\ A_1\bar{A}_2\bar{A}_1,\ \bar{A}_1A_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_1\right\}$$

◆◆◆

2.4 E_4: Ένα φτερό αεροπλάνου συναρμολογείται με ένα μεγάλο αριθμό βιδών M. Απαριθμείται ο αριθμός των ελαττωματικών βιδών.

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ M\}$$

◆◆◆

2.5 E_5: Κατασκευάζονται ηλεκτρικοί λαμπτήρες μέχρι να παραχθούν 10 ελαττωματικοί. Παρατηρείται ο αριθμός των παραγόμενων λαμπτήρων.

$$S=\{10,\ 11,\ 12\}$$

◆◆◆

2.6 E_6: Μετρούμε την αντοχή έντασης ενός τύπου χαλύβδινης δοκού.

$$S = \{x|\ x \text{ μη αρνητικός πραγματικός αριθμός}\}$$

◆◆◆

2.7 E_7: Ένας θερμογράφος καταγράφει συνεχώς την θερμοκρασία σ' όλο το 24-ωρο. Σ' ένα συγκεκριμένο τόπο σε ένα ψηλό βουνό κάθε μέρα το πρωί σημειώνεται η ένδειξη του θερμογράφου σε βαθμούς κλίμακας ${}^0C$.

$$S = \{x|\ m < x < M, \text{ όπου } m \text{ η ελάχιστη δυνατή και } M \text{ η μέγιστη δυνατή θερμοκρασία στον τόπο αυτόν}\}$$

Στο ίδιο παράδειγμα, αν παρατηρούμε για πόσες μέρες μέσα σε ένα χρόνο η θερμοκρασία έπεσε κάτω από τους μηδέν βαθμούς ${}^0C$, ο δειγματοχώρος είναι διαφορετικός

$$S = \{0,1,2,3,4,\ldots,364,365\}$$

◆◆◆

Ένας δειγματοχώρος με μικρό αριθμό δειγματοσημείων ενδέχεται να παρασταθεί ευκολότερα με διαγράμματα δέντρων ή άλλων γραφικών παραστάσεων σε δυσδιάστατο ή τριδιάστατο σύστημα αξόνων. Ανεξάρτητα από το πώς περιγράφεται το S, τα στοιχεία του S τα οποία αντιστοιχούν στα αποτελέσματα του τυχαίου πειράματος πρέπει να είναι ***αμοιβαία αποκλειόμενα*** και ***συλλεκτικά εξαντλημένα***. Αυτός είναι και ο ***ορισμός του δειγματοχώρου***.

Προκειμένου να περιγράψουμε έναν δειγματοχώρο σχετιζόμενο με ένα πείραμα, πρέπει να έχουμε ξεκάθαρη ιδέα από αυτό που μετρούμε ή παρατηρούμε. Σημειώστε επίσης ότι το αποτέλεσμα ενός πειράματος δεν είναι πάντοτε αριθμός, μπορεί να είναι ακολουθία, συνάρτηση ή διάνυσμα. Ακόμη, ένα τυχαίο πείραμα μπορεί να περιγραφεί με περισσότερους από ένα δειγματοχώρο. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού μπορεί να έχουμε

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ή } S=\{\text{μονός, ζυγός}\}$$

Τέλος, είναι απαραίτητο να συζητηθεί ο αριθμός των δειγματοσημείων σε έναν δειγματοχώρο. Διακρίνονται κυρίως τρεις περιπτώσεις:

- **πεπερασμένος** δειγματοχώρος, όταν έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων, όπως στα παραδείγματα 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 και 2.7 στον δεύτερο δειγματοχώρο του.
- **άπειρος αριθμήσιμος** δειγματοχώρος, όταν τα σημεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με το σύνολο των φυσικών αριθμών, όπως στο παράδειγμα 2.5.
- **άπειρος** μη αριθμήσιμος δειγματοχώρος, όταν έχει άπειρο πλήθος σημείων

αλλά όχι αριθμήσιμο, όπως στα παραδείγματα 2.6 και 2.7 στον πρώτο δειγματοχώρο του.

2.1.3 Σύνθετος Δειγματοχώρος

Ένα σύνθετο πείραμα E μπορεί να συνίσταται στην εκτέλεση δύο απλών πειραμάτων E_1 και E_2 με δειγματοχώρους S_1 και S_2 αντίστοιχα. Εκτελούμε τα πειράματα αυτά από μία φορά. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $S_1 \times S_2$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραστήσει όλα τα πιθανά αποτελέσματα του σύνθετου πειράματος E. Έτσι, ο σύνθετος δειγματοχώρος

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2$$

περιέχει σαν δειγματοσημεία τα *διατεταγμένα* σύνολα

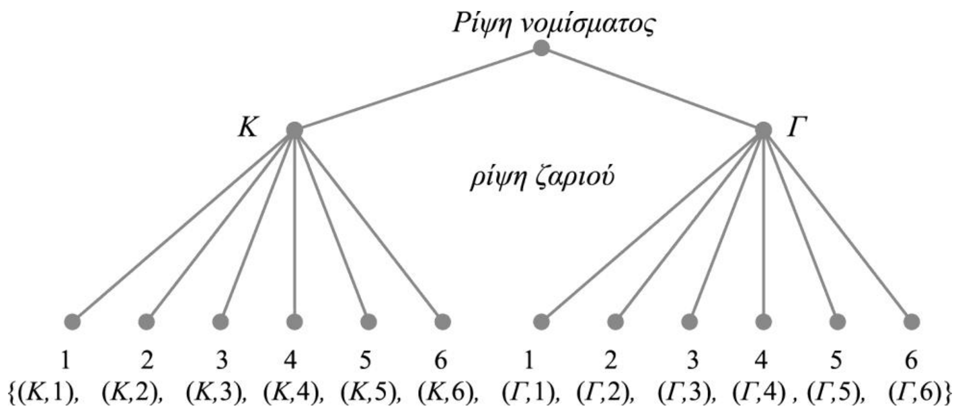
$$\left\{(s_{1\kappa}, s_{2\lambda} \middle| s_{1\kappa} \in S_1,\ s_{2\lambda} \in S_2,\ \kappa=1,2,\ldots,n_1,\ \lambda=1,2,\ldots,n_2\right\}$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν αναφέρονται τέτοιοι σύνθετοι δειγματοχώροι.

Παράδειγμα 2.8 Ένα νόμισμα και ένα ζάρι ρίπτονται μαζί, παρατηρείται η ένδειξη του ζαριού και νομίσματος, βλέπε Σχήμα 2.1. Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύνθετο πείραμα E, αποτελούμενο από την εκτέλεση δύο απλούστερων πειραμάτων E_1={*ρίψη νομίσματος*} και E_2={*ρίψη ζαριού*} με αντίστοιχους δειγματοχώρους

$$S_1 = \{K, \Gamma\} \text{ και } S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό, το πείραμα E έχει σαν δειγματοχώρο το καρτεσιανό γινόμενο των S_1 και S_2,



Σχήμα 2.1

Σύνθετο πείραμα ρίψης νομίσματος και ζαριού

$$S = S_1 \times S_2 = \{K, \Gamma\} \times \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$S = (K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6),(\Gamma,1),(\Gamma,2),(\Gamma,3),(\Gamma,4),(\Gamma,5),(\Gamma,6)$$

Για λόγους συντομίας τα διατεταγμένα υποσύνολα του σύνθετου δειγματοχώρου S γράφονται και χωρίς παρενθέσεις ή κόμματα, όπως

$$S = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$$

Ακόμη, το σύνθετο πείραμα μπορεί να συνίσταται στην εκτέλεση δύο ή περισσότερων πειραμάτων με δειγματοχώρο το καρτεσιανό γινόμενο

$$S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$$

Στην πράξη συναντάμε πολλά σύνθετα πειράματα E και καταγράφουμε τον αντίστοιχο δειγματικό τους χώρο S, χωρίς να αναφερθούμε αναλυτικότερα στο καρτεσιανό γινόμενο των απλούστερων δειγματοχώρων, όπως π. χ. στα παραδείγματα που ακολουθούν.

◆◆◆

Παράδειγμα 2.9 Ρίχνουμε τρία νομίσματα (όπως στο παράδειγμα 2.2) και παρατηρούμε τις ενδείξεις τους. Το πείραμα αυτό μπορούμε να το σκεφτούμε και σαν ένα σύνθετο πείραμα τύχης E, το οποίο συνίσταται στην εκτέλεση των απλούστερων πειραμάτων E_1={*ρίψη νομίσματος* 1}, E_2={*ρίψη νομίσματος* 2} και E_3={*ρίψη νομίσματος* 3}, με δειγματοχώρους $S_1 = \{K,\ \Gamma\}$, $S_2=\{K,\ \Gamma\}$, *και* $S_3=\{K,\Gamma\}$ αντίστοιχα. Δηλαδή, ο σύνθετος δειγματοχώρος S είναι το καρτεσιανό γινόμενο,

$S=S_1 \times S_2 \times S_3=\{K, \Gamma\} \times \{K, \Gamma\} \times \{K, \Gamma\}$,

$S=\{(K,K,K),(K,K,\Gamma),(K,\Gamma,K),(\Gamma,K,K),\ (K,\Gamma,\Gamma),\ (\Gamma,K,\Gamma),\ (\Gamma,\Gamma,K)\ \Gamma,\Gamma,\Gamma)\}$

ο οποίος είναι ίδιος με τον δειγματοχώρο του παραδείγματος 2.2, όπως το καταγράψαμε εμπειρικά.

◆◆◆

Παράδειγμα 2.10 Ρίχνουμε δύο ζάρια (*μια ζαριά*) και παρατηρούμε τις ενδείξεις τους. Όλα τα δυνατά ζευγάρια των ενδείξεων είναι 36 και είναι γνωστά,

S={(1,1),(1,2),(1,3),…,(2,1),(2,2), (2,3),…, (3,1), (3,2), (3,3),…, (6,1),

(6,2), (6,3), (6,4),(6,5), (6,6)}

Όμως, κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι E_1 και E_2 είναι τα απλά πειράματα για τη ρίψη του κάθε ζαριού με δειγματοχώρους S_1={1, 2, 3, 4, 5, 6} και S_2={1, 2, 3, 4, 5, 6} αντίστοιχα. Έτσι, το πείραμα της ζαριάς, E, συνίσταται στην εκτέλεση των E_1

και E_2 και έχει δειγματοχώρο S το γινόμενο,

$S=S_1 \times S_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,1),(2,2), (2,3),\ldots, (3,1), (3,2), (3,3),\ldots, (6,1),$

$(6,2), (6,3), (6,4),(6,5), (6,6)\}$

◆◆◆

Παρατήρηση

Στο εξής σε κάθε σύνθετο πείραμα τύχης, ο καθένας μπορεί να καταγράψει τον δειγματικό χώρο, με όποιον τρόπο θεωρεί ευκολότερο. Όμως, στις περιπτώσεις όπου είναι πολλά τα δυνατά ενδεχόμενα του σύνθετου δειγματοχώρου S, συνιστάται το καρτεσιανό γινόμενο των απλούστερων δειγματοχώρων $S_1 \times S_2 \times S_3$.... Αυτή είναι και η βασικότερη ***αρχή απαρίθμησης***, όπως αναφέρεται στην Συνδυαστική.

2.1.4 Γεγονότα

Μία άλλη βασική έννοια συνδεόμενη με το τυχαίο πείραμα είναι το ***γεγονός***. Συχνά σ' ένα δειγματοχώρο δεν μας ενδιαφέρουν μόνο τα δειγματοσημεία αλλά κάποιες ομάδες δειγματοσημείων οι οποίες παριστάνουν κάποια γεγονότα.

○○● Ορισμός. Στην ορολογία συνόλων γεγονός ή ενδεχόμενο είναι ένα υποσύνολο του δειγματοχώρου S. Τα γεγονότα συνηθίζεται να συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, όπως A, B, Γ ή A_1, A_2, A_3, κ. τ. λ.

○○●

Σύμφωνα με τον ορισμό του γεγονότος, ο δειγματοχώρος S και το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι και αυτά γεγονότα.

Παράδειγμα 2.11 Τα ακόλουθα είναι μερικά παραδείγματα από γεγονότα. Αναφερόμενοι στα πειράματα των παραπάνω παραδειγμάτων από 2.1 μέχρι 2.8, $\boldsymbol{A_\kappa}$ είναι ένα γεγονός που προκύπτει από το πείραμα $\boldsymbol{E_\kappa}$, το γεγονός πρώτα περιγράφεται και στη συνέχεια δίνεται το σύνολο των δειγματοσημείων του ή **ευνοϊκών δειγματοσημείων** του όπως αλλιώς αποκαλούνται:

A_1: {*Το τεμάχιο είναι ελαττωματικό*} ή $A_1=\{D\}$.

A_2: {*Τουλάχιστον δύο κεφαλές*} ή $A_2= \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$.
A_3: {*Μία μπουλντόζα έχει βλάβη*} ή $A_3= \{\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,\ A_1\bar{A}_2\bar{A}_1,\ \bar{A}_1A_2\bar{A}_3\}$.
A_4: {*Το πολύ 5 βίδες είναι ελαττωματικές*} ή $A_4=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
A_5: {*Όλοι οι λαμπτήρες είναι ελαττωματικοί*} ή $A_5=\{10\}$.
A_6: {*Η αντοχή είναι μικρότερη ενός θετικού αριθμού α*} ή $A_6=\{x|\ 0<x<\alpha\}$.
A_7: {*Η θερμοκρασία ξεπερνά τους 28^0C*} ή $A_7=\{x|x>28^0\mathrm{C}\}$.
A_8: {*Ένδειξη του νομίσματος κεφαλή και του ζαριού ζυγός αριθμός*}
ή $A_8 =\{(K,2),\ (K,4),\ (K,6)\}$.

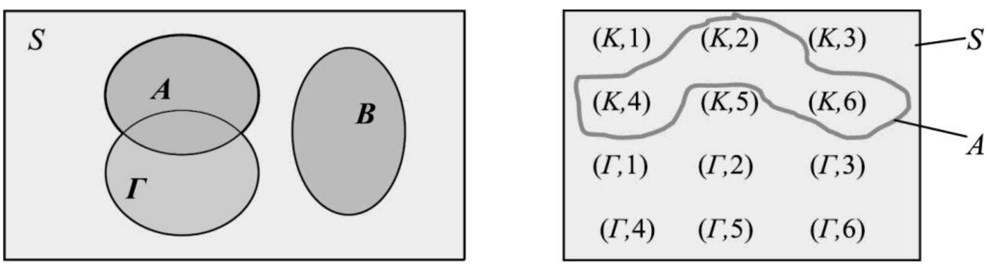
◆◆◆

Όπως φαίνεται και στα παραπάνω παραδείγματα τα γεγονότα A_κ ορίζονται είτε με την μέθοδο της ***περιγραφής*** είτε με την μέθοδο της ***αναγραφής***. Με την πρώτη περιγράφουμε το γεγονός, ενώ με την δεύτερη αναφέρουμε όλα τα ευνοϊκά δειγματοσημεία του. Ένα γεγονός *A* οριζόμενο σ' ένα δειγματοχώρο *S* λέγεται ότι είναι **απλό γεγονός,** εάν περιέχει μόνο ένα δειγματοσημείο. Διαφορετικά, το γεγονός *A* λέγεται **σύνθετο γεγονός** ή απλώς **γεγονός**.

Όταν ο δειγματοχώρος *S* είναι πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος, κάθε υποσύνολό του μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γεγονός. Παρόλα αυτά, αν το *S* είναι άπειρο μη αριθμήσιμο, δεν είναι σίγουρο ότι κάθε υποσύνολο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γεγονός. Ευτυχώς, τέτοια υποσύνολα συναντιώνται πολύ σπάνια για αυτό στη συνέχεια δεν θα ασχοληθούμε μ' αυτά.

Όπως οι δειγματόχωροι, έτσι και τα γεγονότα μπορούν να παρασταθούν με γραφικές παραστάσεις όπως για παράδειγμα τα **διαγράμματα Venn** (από το όνομα ενός Άγγλου μαθηματικού του 19ου αιώνα). Σ' αυτά τα διαγράμματα ο δειγματοχώρος *S* παριστάνεται με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ενώ τα γεγονότα με κλειστές περιοχές μέσα στο παραλληλόγραμμο, βλέπε Σχήμα 2.2. Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις σχέσεις μεταξύ των γεγονότων.

Σχήμα 2.2
Διαγράμματα Venn



(α) δειγματοχώρος *S* και γεγονότα *A, B*,και *Γ*

(β) Ρίψη νομίσματος και ζαριού, *A*={*Κεφαλή και ζυγός αριθμός*}

Ακόμη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαγράμματα δέντρων ή άλλων γραφικών παραστάσεων σε δισδιάστατο ή τρισδιάστατο σύστημα αξόνων για την παράσταση ενός δειγματοχώρου και των συσχετιζόμενων γεγονότων.

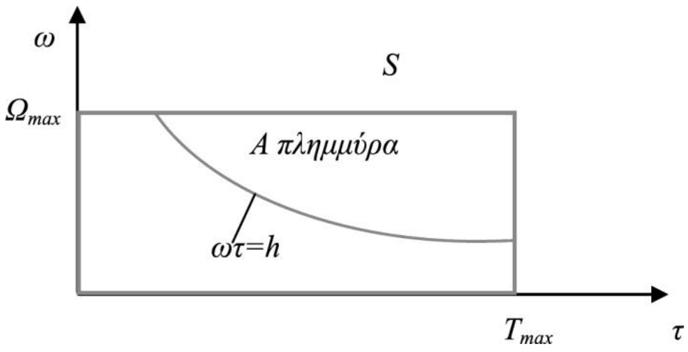
Παράδειγμα 2.12 Σε μία καταιγίδα ενδιαφέρον παρουσιάζει η έντασή της ω και η διάρκειά της τ. Έτσι, ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει άπειρα σημεία

$$S=\left\{(\omega,\tau)\middle|\omega<Q_{\max},\ \tau<T_{\max}\right\}$$

Ένα απλό γεγονός A σε μία καταιγίδα είναι η πλημμύρα, δηλαδή η ποσότητα της βροχόπτωσης ξεπερνά την μέγιστη ποσότητα αποστράγγισης στην περιοχή. Αν το γινόμενο $\omega\cdot\tau$ μετρά την ποσότητα βροχόπτωσης σε μία καταιγίδα ενώ η δυνατότητα αποστράγγισης είναι h, το γεγονός A είναι το σύνολο

$$A=\left\{(\omega,\tau)\middle|\omega\cdot\tau>h\right\}$$

βλέπε Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3

Το πείραμα της καταιγίδας και η πλημμύρα

2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

2.2.1 Πράξεις Γεγονότων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους σχετίζονται τα γεγονότα ενός δειγματοχώρου. Συχνά ενδιαφερόμαστε να περιγράψουμε νέα γεγονότα, συνδυάζοντας άλλα υπάρχοντα γεγονότα. Αφού τα γεγονότα είναι σύνολα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πράξεις συνόλων όπως συμπλήρωμα, ένωση, τομή, διαφορά, κ.τ.λ., για να σχηματίσουμε άλλα γεγονότα που μας ενδιαφέρουν.

Συμπλήρωμα: Το συμπληρωματικό ενός γεγονότος A σε ένα δειγματικό χώρο S είναι το σύνολο των δειγματοσημείων του S, τα οποία δεν ανήκουν στο A. Συμβολίζουμε το συμπληρωματικό του A με $\overline{A}$.

Περιεκτικότητα: Για δύο γεγονότα A και B τα οποία ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο S, λέμε ότι το A περιέχει το B, αν κάθε δειγματοσημείο του B ανήκει και στο A. Συμβολίζουμε **$B \subseteq A$.** Σε μία εκτέλεση του πειράματος αν πραγματοποιείται το B σίγουρα πραγματοποιείται και A.

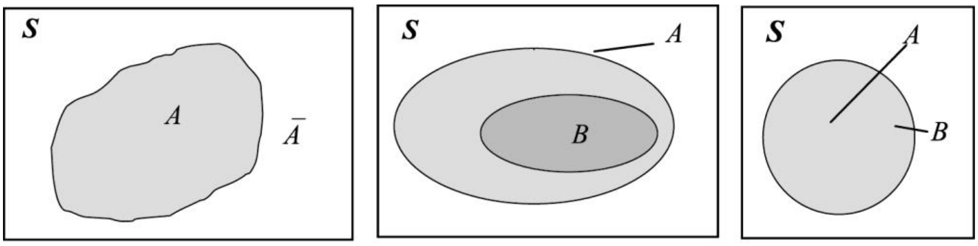
Ισότητα: Για δύο γεγονότα A και B, τα οποία ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο S, ισχύει η ισότητα, **$A=B$,** αν $B \subseteq A$ και $A \subseteq B$. Δηλαδή, κάθε δειγματοσημείο του A είναι δειγματοσημείο του B και το αντίστροφο. Τα γεγονότα A και B λέγονται και ισοδύναμα, διότι σε μία εκτέλεση του πειράματος είτε πραγματοποιούνται και τα δύο μαζί ή δεν πραγματοποιείται κανένα.

Με βάση τον ορισμό της ισότητας ισχύει

$$A \cap S = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \{\} = \{\}, \quad A \cup S = S,$$
$$A \cup A = A, \quad A \cup \{\} = A, \quad A \cup \overline{A} = S$$

Σχήμα 2.4

Σχεδιαγράμματα Venn



α) συμπλήρωμα, $\overline{A}$ β) περιεκτικότητα $B \subseteq A$ γ) ισότητα, $A=B$

Ένωση

Αν A και B είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματικού χώρου S, ορίζουμε σαν ένωση των A και B το γεγονός Γ, το οποίο περιέχει δειγματο-σημεία που ανήκουν στο A ή στο B ή και στα δυο, και γράφουμε $\Gamma = A \cup B$.

Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης, το γεγονός Γ συμβαίνει εάν και μόνον εάν συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δύο γεγονότα A ή B, βλέπε Σχήμα 2.5.

Παραδείγματος χάριν, σε ένα εργοτάξιο σχετικά με τα αποθέματα τσιμέντου και άμμου, συμβολίζουμε με Α και Β τα γεγονότα ότι κάποια μέρα παρατηρείται έλλειμμα τσιμέντου και άμμου αντίστοιχα. Το γεγονός ότι κάποια μέρα παρατηρείται έλλειμμα είτε σε τσιμέντο ή σε άμμο ή μπορεί και στα δύο εκφράζεται με την ένωση $A \cup B$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό **ισότητας** και **συμπλήρωμα** ισχύει

$$A \cup S = S, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \{\} = A, \quad A \cup \overline{A} = S, \quad \overline{\overline{A}} = A,$$

όπου στην τελευταία ισότητα η ερμηνεία είναι, ότι το συμπλήρωμα του συμπληρώματος του A είναι το ίδιο το A.

Η ένωση μπορεί να επεκταθεί για τρία ή και περισσότερα γεγονότα,

$$A \cup B \cup \Gamma \cup ...$$

Τομή

Αν A και B είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματικού χώρου S, ορίζουμε σαν τομή των A και B το γεγονός Γ το οποίο περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν και στο A και στο B, και γράφουμε $\Gamma = A \cap B$.
Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης, το γεγονός Γ συμβαίνει εάν και μόνον εάν συμβούν ταυτόχρονα τα δύο γεγονότα A και B, βλέπε Σχήμα 2.5.

Παραδείγματος χάριν, στο παραπάνω εργοτάξιο σχετικά με τα αποθέματα τσιμέντου και άμμου, Το γεγονός ότι κάποια μέρα παρατηρείται έλλειμμα και στα δύο, και σε τσιμέντο και σε άμμο, εκφράζεται με την τομή $A \cap B$. Σαν άλλο παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε την βλάβη στην κεντρική γραμμή ηλεκτροδότησης. Αν A είναι το γεγονός βλάβης σε κάποιο σημείο από την μονάδα παραγωγής μέχρι το 10^{o} χιλιόμετρο και B το γεγονός βλάβης από το 8^{o} μέχρι το 15^{o} χιλιόμετρο, η τομή $A \cap B$ παριστάνει την βλάβη από το 8^{o} μέχρι το 10^{o} χιλιόμετρο.

Με βάση τους ορισμούς των παραπάνω πράξεων ισχύει

$$A \cap S = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \{\} = \{\}, \quad A \cap \overline{A} = \{\}, \quad S \cap \overline{A} = \overline{A}$$

Τέλος, η **τομή** μπορεί να επεκταθεί για τρία ή και περισσότερα γεγονότα

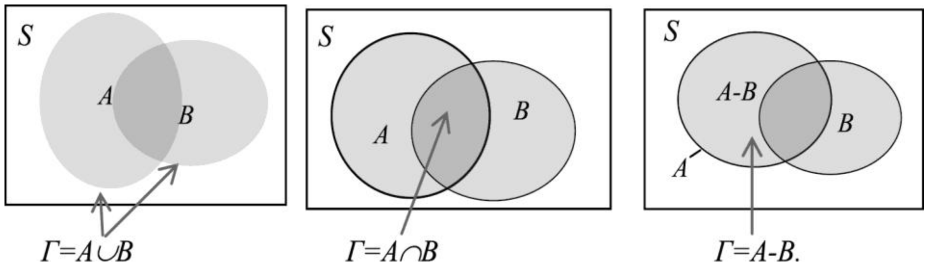
$$A \cap B \cap \Gamma \cap ...$$

Διαφορά

Αν A και B είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματικού χώρου **S**, ορίζουμε σαν διαφορά $\boldsymbol{A-B}$ το γεγονός $\boldsymbol{\Gamma}$, το οποίο περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν στο A και όχι στο B, και γράφουμε $\boldsymbol{\Gamma = A-B}$.
Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης, το γεγονός Γ συμβαίνει εάν και μόνον εάν συμβεί το A και όχι το B, βλέπε Σχήμα 2.5.

Σχήμα 2.5

Πράξεις γεγονότων *Α, Β*



Συνήθως, η διαφορά *Α-Β* καλείται *μόνον Α,* διότι περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν μόνον στο σύνολο *Α*. Επίσης, ένας ισοδύναμος συμβολισμός της διαφοράς είναι η τομή $A \cap \overline{B}$.

2.2.2 Ασυμβίβαστα Γεγονότα ή Αμοιβαίως Αποκλειόμενα

Τέλος, από τους παραπάνω κανόνες ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση, όπου η τομή δύο γεγονότων δεν περιέχει κανένα δειγματοσημείο. Παραδείγματος χάριν αν *Α, Β* συμβολίζουν τα γεγονότα ότι κάποιος θα ταξιδέψει από Θεσσαλονίκη για Αθήνα με αεροπλάνο ή αυτοκίνητο, αντίστοιχα, η τομή των δύο γεγονότων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή, το αδύνατο γεγονός. Ακόμη άλλο παράδειγμα, αν δύο γεγονότα παριστάνουν ότι ένα αυτοκίνητο σε μία διασταύρωση θα στρίψει αριστερά ή δεξιά, αντίστοιχα, η τομή τους δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

○○● Ορισμός Δύο γεγονότα *Α* και *Β* οριζόμενα σε ένα δειγματικό χώρο είναι αμοιβαία αποκλειόμενα ή ασυμβίβαστα, εάν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα δεν έχουν κανένα κοινό δειγματοσημείο,

$$A \cap B = \varnothing$$

άρα δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν μαζί σε μία εκτέλεση του πειράματος.

○○●

Σε ένα σχεδιάγραμμα **Venn** εύκολα διακρίνει κανείς τα ασυμβίβαστα γεγονότα, δεν έχουν κανένα κοινό δειγματοσημείο και είναι δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους, βλέπε Σχήμα 2.6 (β).

Παράδειγμα 2.13 Ένα μεγάλο αντλιοστάσιο έχει δύο ηλεκτρικές αντλίες Α1 και Α2 εν παραλλήλω και μία τρίτη ηλεκτρική αντλία όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Εάν (N_1, N_2, N_3) είναι ένα διάνυσμα στον τρισδιάστατο χώρο, όπου N_κ = 1, εάν η A_κ αντλία αποτυγχάνει, και $N_\kappa = 0$ σε άλλη περίπτωση, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 8 δειγματοσημεία

$$S=\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0),(0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

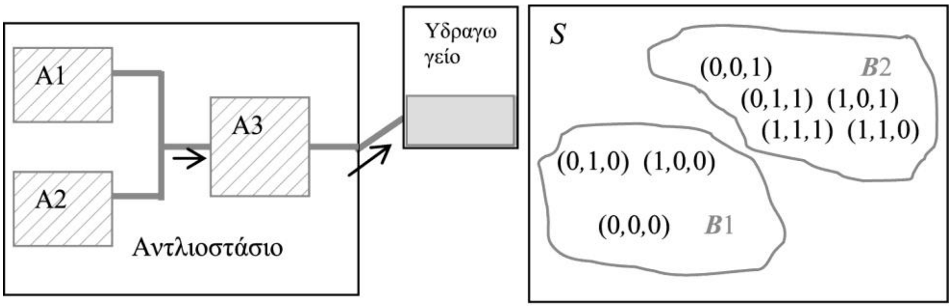
Το σύστημα λειτουργεί αν αντλεί η Α3 και μία τουλάχιστον από τις Α1 και Α2, συμβολίζουμε το γεγονός αυτό με $B1$. Ακόμη, το σύστημα αποτυγχάνει αν δεν λειτουργεί η Α3 ή δεν λειτουργούν και οι δύο παράλληλες αντλίες, συμβολίζουμε το γεγονός αυτό με $B2$,

$$B1=\{((0,0,0), (0,1,0), (1,0,0)\}$$

$$B2=\{(0,0,1),(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

Σχήμα 2.6

Γραφικές παραστάσεις παραδείγματος 2.13



α) Σύστημα άντλησης νερού β) σχεδιάγραμμα Venn, $B1 \cap B2 = \varnothing$

Τα γεγονότα $B1$ και $B2$ είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, διότι $B1 \cap B2 = \varnothing$, ή όπως αλλιώς λέγεται ασυμβίβαστα γιατί δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν και τα δύο μαζί.

2.2.3 Κανόνες Πράξεων Γεγονότων

Αφού τα γεγονότα είναι σύνολα, οι κανόνες ή ιδιότητες των πράξεων στα σύνολα διέπουν και τις πράξεις των γεγονότων. Οι σπουδαιότερες ιδιότητες στις πράξεις γεγονότων είναι οι ακόλουθες:

Αντιμεταθετική: Η ένωση και η τομή των γεγονότων είναι αντιμεταθετικές πράξεις,

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

Προσεταιριστική: Η ένωση και η τομή των γεγονότων είναι προσεταιριστικές πράξεις,

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma), \quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$$

Επιμεριστική: Η ένωση και η τομή των γεγονότων είναι επιμεριστικές πράξεις,

$$(A\cup B)\cap \Gamma=(A\cap \Gamma)\cup(B\cap \Gamma), \quad (A\cap B)\cup \Gamma=(A\cup \Gamma)\cap(B\cup \Gamma)$$

Η προτεραιότητα για τις πράξεις της ένωσης και τομής είναι όμοια με την ιεράρχηση της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού σε μία αλγεβρική έκφραση. Έτσι, προτεραιότητα έχουν οι πράξεις γεγονότων μέσα στις παρενθέσεις και ακολουθούν οι πράξεις της τομής και ένωσης με την σειρά που αναφέρονται.

Παρατήρηση

Πρέπει να τονισθεί ότι οι πράξεις αριθμών στην άλγεβρα δεν έχουν καμία σχέση με την ένωση, τομή ή διαφορά γεγονότων, για παράδειγμα,

- $A\cap A=A$, ενώ στο γινόμενο δύο αριθμών $\alpha\cdot\alpha=\alpha^2\neq\alpha$,
- $(A\cup B)\cap(B\cup \Gamma)=A\cap B\cup B\cap B\cup A\cap \Gamma\cup B\cap \Gamma=A\cap \Gamma\cup B$,

  ενώ $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma\neq\alpha\gamma+\beta$.
- $(A-B)\cup B=A\cup B$, ενώ $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$.

◆◆◆

Νόμος De Morgan: Εδώ έχουμε πράξεις τομής και ένωσης μεταξύ γεγονότων και των συμπληρωματικών τους,

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \quad ή \quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{2.1}$$

Η απόδειξη είναι προφανής αν χρησιμοποιήσει κανείς τον ορισμό της ισότητας δύο γεγονότων. Ο νόμος De Morgan μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα των δύο γεγονότα,

$$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap....\cap\overline{A_n}$$
$$\overline{A_1\cap A_2\cap A_3\cap....\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup....\cup\overline{A_n}$$

η δε απόδειξη θα μπορούσε να γίνει με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Τέλος, αν λάβουμε υπ’ όψιν ότι $\overline{\overline{A}}=A$, είναι προφανής και η ακόλουθη σχέση,

$$\overline{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap....\cap\overline{A_n}}=A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n.$$

Από τις παραπάνω πράξεις και κανόνες εύκολα καταλήγει κανείς στην **δυική αρχή**, η οποία δηλώνει ότι το συμπλήρωμα ενώσεων και τομών ισούται με τις τομές και ενώσεις των συμπληρωματικών τους, παράδειγμα

$$\overline{A\cup(B\cap\Gamma)}=\bar{A}\cap\overline{(B\cap\Gamma)}=\bar{A}\cap(\bar{B}\cup\bar{\Gamma})$$

$$\overline{A\cap B\cap\bar{\Gamma}\cup A\cap\Gamma}=\overline{(A\cap B\cap\bar{\Gamma})\cup(A\cap\Gamma)}=\overline{A\cap B\cap\bar{\Gamma}}\cap\overline{A\cap\Gamma}$$
$$=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\Gamma\cap\bar{A}\cup\bar{\Gamma}$$

Παράδειγμα 2.14 Στο παράδειγμα 2.14 το νερό φθάνει στο υδραγωγείο από το αντλιοστάσιο (βλέπε Σχήμα 2.6, (α)). Συμβολίζουμε με A_1, A_2, A_3, τα γεγονότα ότι οι αντίστοιχες αντλίες διακόπτουν την άντληση λόγω βλάβης.

Το γεγονός ότι η παροχή νερού στο υδραγωγείο διακόπτεται, Δ, εκφράζεται με τις εξής πράξεις γεγονότων,

$$\Delta = A_3\cup(A_1\cap A_2)$$

δηλαδή, το γεγονός Δ συμβαίνει αν η Α3 διακόπτει την άντληση ή και οι δύο αντλίες Α1, Α2 δεν αντλούν νερό.

Το γεγονός ότι το αντλιοστάσιο παρέχει νερό στο υδραγωγείο, $\bar{\Delta}$, συμβαίνει αν δεν διακόπτει την άντληση η Α3 και τουλάχιστον μία από τις Α2 και Α1. Δηλαδή, η παροχή νερού στο υδραγωγείο εκφράζεται με την ακόλουθη άλγεβρα γεγονότων,

$$\bar{\Delta}=\overline{A_3}\cap(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})$$

Όμως, μπορούμε να καταλήξουμε στην ίδια άλγεβρα γεγονότων για το $\bar{\Delta}$, αν πάρουμε το συμπληρωματικό της άλγεβρας γεγονότων του Δ, σύμφωνα με τον νόμο De Morgan,

$$\bar{\Delta}=\overline{A_3\cup(A_1\cap A_2)}=\overline{A_3}\cap(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}).$$

Παράδειγμα 2.15 Για την κατασκευή ενός μεγάλου εργοστασίου διακρίνουμε τρεις φάσεις: πρώτον θεμελίωση, δεύτερον δόμηση, τρίτον ηλεκτρολογική εγκατάσταση. Συμβολίζουμε με Θ, Δ *και* H τα γεγονότα καθυστέρησης θεμελίωσης, δόμησης και ηλεκτρικής εγκατάστασης αντίστοιχα. Να εκφραστούν με συμβολισμό συνόλων τα γεγονότα ότι το εργοστάσιο ολοκληρώνεται

(α) χωρίς καθυστέρηση,

(β) με καθυστέρηση μόνον μίας φάσης,

(γ) το πολύ με καθυστέρηση δύο φάσεων.

Απάντηση: (α) Η ένωση των γεγονότων *Θ, Δ* και *Η* συμβολίζει το γεγονός της καθυστέρησης του εργοστασίου. Το συμπλήρωμα της ένωσης, προφανώς, συμβολίζει την ολοκλήρωση του έργου άνευ καθυστέρησης,

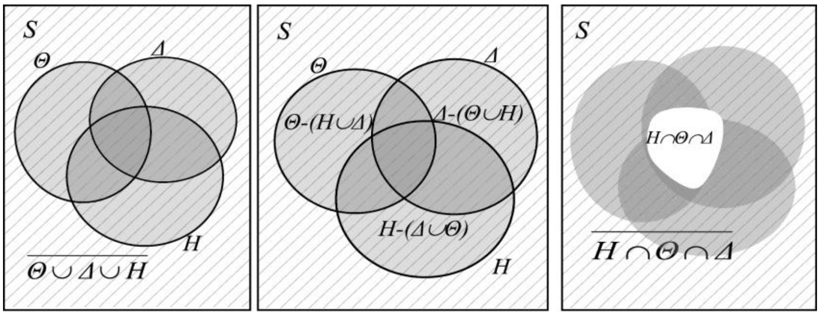
$$\{\textit{χωρίς καθυστέρηση}\} = \overline{(\Theta \cup \Delta \cup H)}$$

(β) Εδώ, πρέπει να πάρουμε την ένωση των γεγονότων να καθυστερήσει μόνον η θεμελίωση, μόνον η δόμηση, μόνον η ηλεκτρική εγκατάσταση, δηλαδή,

$$\{\textit{καθυστέρηση μόνο μιας φάσης}\} = (\Theta - (\Delta \cup H)) \cup (\Delta - (\Theta \cup H)) \cup (H - (\Theta \cup \Delta))$$

Σχήμα 2.7

Διαγράμματα Venn, Παράδειγμα 2.16.



(α) το έργο καθυστερεί (β) μόνο μία φάση καθυστερεί (γ) μέχρι δύο φάσεις

ή εναλλακτικά

$$\{\textit{καθυστέρηση μόνον μίας φάσης}\} = (H \cap \overline{\Theta} \cap \overline{\Delta}) \cup (\overline{H} \cap \Theta \cap \overline{\Delta}) \cup (\overline{H} \cap \overline{\Theta} \cap \Delta)$$

ή

$$\{\textit{καθυστέρηση μόνον μίας φάσης}\} = (H - \Theta - \Delta) \cup (\Theta - H - \Delta) \cup (\Delta - H - \Theta)$$

(γ) Το γεγονός αυτό σημαίνει όχι και τα τρία γεγονότα μαζί,

$$\overline{H \cap \Theta \cap \Delta}$$

2.3 ΧΩΡΟΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ – ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ

○○● Ορισμός Το σύνολο ή η συλλογή από όλα τα δυνατά γεγονότα του δειγματοχώρου *S* ορίζεται σαν χώρος γεγονότων ή δυναμοσύνολο και συμβολίζεται με $\boldsymbol{S}^*$. Ο χώρος αυτός έχει τις εξής βασικές ιδιότητες:

- $S \in \boldsymbol{S}^*$

- *Αν* $A \in \boldsymbol{S}^* \Rightarrow \overline{A} \in \boldsymbol{S}^*$
- *Αν* $A_1 \in \boldsymbol{S}^*$ *και* $A_2 \in \boldsymbol{S}^* \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \boldsymbol{S}^*$, $A_1 \cup A_2 \in \boldsymbol{S}^*$, $A_1 - A_2 \in \boldsymbol{S}^*$.

Αν ένας δειγματοχώρος S περιέχει $\boldsymbol{n}$ δειγματοσημεία, τότε όλα τα στοιχεία του $\boldsymbol{S}^*$, δηλαδή, όλα τα δυνατά γεγονότα του δειγματοχώρου είναι 2^n,

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{S}^*) = 2^n$$

Παράδειγμα 2.16 Στη ρίψη ενός νομίσματος, ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι $S=\{K,\Gamma\}$. Όλα τα γεγονότα που μπορούν να ορισθούν σε αυτό το πείραμα είναι τα υποσύνολα του S, όπως $\{K\}$, $\{\Gamma\}$, $\{K,\Gamma\}$ και $\varnothing$. Το δυναμοσύνολο $\boldsymbol{S}^*$ περιέχει $2^2=4$ διαφορετικά υποσύνολα

$$\boldsymbol{S}^*=\{\ \{\ \},\ \{K\},\ \{\Gamma\},\ \{K,\Gamma\}\}$$

◆◆◆

Ενώ το S περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, ο χώρος γεγονότων ή δυναμοσύνολο $\boldsymbol{S}^*$ περιέχει το S και όλα τα δυνατά υποσύνολα ή γεγονότα που ορίζονται συνδυάζοντας τα αποτελέσματα του πειράματος.

2.4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η ***πιθανότητα*** ενός γεγονότος είναι η έκφραση της βεβαιότητας πραγματοποίησής του. Επί πλέον, μία πιθανότητα είναι ένας αριθμός ο οποίος ξεκινά από το μηδέν, για ένα γεγονός το οποίο δεν μπορεί να συμβεί, και φθάνει στο ένα, για ένα γεγονός που είναι σίγουρο ότι θα συμβεί. Αλλά, πώς προσδιορίζουμε τον αριθμό πιθανότητας στα άλλα γεγονότα; Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη δική μας ερμηνεία της πιθανότητας. Παρόλο που υπάρχουν διάφορες έννοιες και ορισμοί για την πιθανότητα στις διάφορες επιστήμες, όλοι συμφωνούν ότι ο αριθμός πιθανότητας ή η πιθανότητα ενός γεγονότος μπορεί να προσδιορισθεί με την ***θεωρία κλασσικής πιθανότητας***, ***σχετικής συχνότητας***, και ***υποκειμενικής πιθανότητας***.

Η Θεωρία κλασσικής πιθανότητας εφαρμόζεται μόνο σε πειράματα τύχης όπου ο δειγματοχώρος S αποτελείται από εξίσου πιθανά δειγματοσημεία. Σε τέτοια πειράματα τύχης, βασική αρχή της κλασσικής θεωρίας είναι ότι κανένα αποτέλεσμα του πειράματος δεν είναι πιθανότερο του άλλου. Με βάση αυτή την αρχή, όλα τα δυνατά αποτελέσματα του S έχουν την ίδια πιθανότητα πραγματοποίησης. Για παράδειγμα, στην ρίψη ενός ζαριού, καμία ένδειξη δεν είναι πιθανότερη της άλλης, και κατά συνέπεια η πιθανότητα εμφάνισης οιοδήποτε αριθμού (1 έως 6) είναι 1/6.

Γενικά, σε ένα πείραμα τύχης με n ισοπίθανα δειγματοσημεία,

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$$

η πραγματοποίηση του s_i είναι το ίδιο πιθανή με την πραγματοποίηση οιουδήποτε άλλου ενδεχομένου s_j. Στην περίπτωση αυτή η κλασσική θεωρία ορίζει σαν πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου s_i, $P(s_i)$, το $1/n$. Κατ' επέκταση, αν ένα γεγονός A_r του δειγματικού χώρου S περιέχει κ δειγματοσημεία,

$$A_r = \{s_{r1}, s_{r2}, ..., s_{rk}\}$$

ως πιθανότητα πραγματοποίησης του ορίζεται ο λόγος κ/n.

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί σε ένα απλό και κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.

Κλασσικός ορισμός της πιθανότητας: Εάν ένα πείραμα τύχης έχει $\boldsymbol{N(S)}$ ισοπίθανα αποτελέσματα, η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος $\boldsymbol{A}$ του $\boldsymbol{S}$, το οποίο περιέχει $\boldsymbol{N(A)}$ δειγματοσημεία, συμβολίζεται με $\boldsymbol{P(A)}$ και είναι ο λόγος του $\boldsymbol{N(A)}$ προς $\boldsymbol{N(S)}$,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}} \tag{2.2}$$

Παράδειγμα 12.17 Στην ρίψη ενός ζαριού, αν A είναι το γεγονός ότι έχουμε ένδειξη ζυγού αριθμού, A={2,4,6} και B είναι το γεγονός ότι η ένδειξη είναι μικρότερη του 5, B={1,2,3,4}, οι αντίστοιχες πιθανότητες πραγματοποίησης των A και B κατά την ρίψη του ζαριού είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

◆◆◆

Παράδειγμα 2.18 Στην ρίψη ενός νομίσματος τρεις φορές, ο δειγματοχώρος του πειράματος τύχης S έχει 8 ισοπίθανα δειγματοσημεία,

S={*ΚΚΚ*, *ΚΚΓ*, *ΚΓΚ*, *ΓΚΚ*, *ΚΓΓ*, *ΓΚΓ*, *ΓΓΚ*, *ΓΓΓ*}.

Αν A είναι το γεγονός ότι έχουμε δύο Κεφαλές και ένα Γράμμα,

A={*ΚΚΓ*, *ΚΓΚ*, *ΓΚΚ*},

τότε στην ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές η πιθανότητα πραγματοποίησης του γεγονότος A είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{8}$$

Παρατηρήσεις

(A) Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι η κλασσική θεωρία βασίζεται στην υπόθεση ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης είναι απόλυτα ισοπίθανα και εφαρμόζεται όταν ικανοποιείται πλήρως. Έτσι, δεν δημιουργείται καμία δυσκολία, όταν αναφερόμαστε σε ένα μη δολιευμένο ζάρι, νόμισμα ή αξιόπιστο τροχό ρουλέτας, όπου όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι απόλυτα ισοπίθανα. Στον πραγματικό κόσμο όμως τα δυνατά αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών μπορεί να μην είναι ακριβώς ισοπίθανα. Για αυτό, η υπόθεση του απόλυτα ισοπίθανα θα προκαλέσει κάποια απόκλιση από την πραγματική πιθανότητα. Ακόμη, σε ένα δολιευμένο ζάρι, νόμισμα ή μη τίμιο τροχό ρουλέτας η κλασσική θεωρία οδηγεί σε λάθος εκτίμηση πιθανότητα. Στις περιπτώσεις αυτές, συνιστάται η θεωρία της σχετικής συχνότητας, όπως αναφέρεται στην επόμενη παράγραφο.

(B) Στα παραδείγματα που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα, εύκολα απαριθμήθηκαν όλα τα δειγματοσημεία του δειγματικού χώρου S και όλοι οι δυνατοί τρόποι (ευνοϊκά δειγματοσημεία) με τους οποίους συμβαίνει το γεγονός A. Υπάρχουν όμως περισσότερο σύνθετες περιπτώσεις, όπου η απαρίθμηση όλων των δειγματοσημείων του S και A απαιτεί πιο συστηματικές μεθόδους, όπως αναφέρονται στην παράγραφο της Συνδυαστικής.

◆◆◆

Στην περίπτωση, όπου ο δειγματοχώρος S έχει ισοπίθανα αλλά άπειρα δειγματοσημεία, ο προσδιορισμός της κλασσικής πιθανότητας ενός γεγονότος A του S ενδέχεται να είναι υπολογιστικά αδύνατος. Διότι, ενδέχεται το σύνολο A να περιέχει σε μια τέτοια περίπτωση άπειρα δειγματοσημεία και ο λόγος των δύο πληθάριθμων $N(A)$ προς $N(S)$ είναι απροσδιόριστος. Παρ' όλα αυτά, η κλασσική πιθανότητα μπορεί να προσδιορισθεί, αν περιγράψουμε τον δειγματοχώρο S και το γεγονός A κατά κάποιο τρόπο με πεπερασμένο αριθμό ισοπίθανων ομαδοποιημένων δειγματοσημείων.

Παράδειγμα 2.19 Μία ράβδος μήκους α σπάει τυχαία σε οποιοδήποτε σημείο της. Ποια η πιθανότητα ότι το πρώτο κομμάτι της θα είναι μικρότερο από το δεύτερο;

Το πείραμα τύχης συνίσταται στο ότι η ράβδος σπάει ισοπίθανα σε κάποιο σημείο της, ο δε δειγματοχώρος S περιέχει άπειρα ισοπίθανα δειγματοσημεία, $N(S) = \infty$. Επίσης, το γεγονός A ότι το πρώτο κομμάτι είναι μικρότερο από το δεύτερο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η ράβδος σπάει στο πρώτο ήμισυ. Έτσι, τα δειγματοσημεία που περιέχει το γεγονός A αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία του πρώτου ήμισυ τα οποία είναι άπειρα το πλήθος, δηλαδή $N(A) = \infty$. Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία η πιθανότητα πραγματοποίησης του A, $P(A)$, είναι ο λόγος των δύο πληθάριθμων και είναι προφανώς απροσδιόριστος.

Όμως, περιγράφοντας διαφορετικότερα τον δειγματικό χώρο, $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, όπου α_1 και α_2 παριστάνουν τα ισοπίθανα ενδεχόμενα η ράβδος να σπάσει στο πρώτο ή δεύτερο ήμισυ αντίστοιχα, το γεγονός A περιέχει ένα δειγματοσημείο, $A = \{\alpha_1\}$. Έτσι, με την κλασσική θεωρία η πιθανότητα $P(A)$ είναι 1/2.

2.4.2 Θεωρία Σχετικής Συχνότητας

Η θεωρία αυτή υποστηρίζει ότι η μόνη έγκυρη διαδικασία προσδιορισμού πιθανότητας γεγονότος είναι η πολλαπλή επανάληψη του πειράματος E. Εάν το πείραμα διεξήχθη n φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και ένα γεγονός A που σχετίζεται με το E συνέβη x_A φορές, $x_A \le n$, τότε μία εκτίμηση της πιθανότητας πραγματοποίησης του γεγονότος A σε μία εκτέλεση του πειράματος είναι ο λόγος x_A / n. Επίσης, αν το n αυξηθεί χωρίς περιορισμό τότε ο λόγος x_A / n τείνει στην πιθανότητα του γεγονότος A, δηλαδή

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_A}{n} \qquad (2.3)$$

Προκειμένου να δώσουμε ένα καλύτερο μαθηματικό υπόβαθρο στην σχετική συχνότητα θεωρούμε δύο γεγονότα A και B σχετιζόμενα με το επαναλαμβανόμενο πείραμα E. Αν x_A και x_B είναι οι αριθμοί εμφάνισης των γεγονότων A και B στις n επαναλήψεις του πειράματος, αντίστοιχα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό της σχετικής συχνότητας.

○○● Ορισμός Σχετική συχνότητα του γεγονότος A, f_A, σε n επαναλήψεις του πειράματος τύχης E καλείται ο λόγος x_A/n,

$$f_A = \frac{x_A}{n}$$

Η σχετική συχνότητα f_A έχει τις ακόλουθες προφανείς βασικές ιδιότητες:

- $0 \le f_A \le 1$.
- $f_A = 1$ εάν και μόνον εάν το A συμβαίνει σε κάθε επανάληψη του E.
- $f_A = 0$ εάν και μόνον εάν το A δεν συμβαίνει σε καμία επανάληψη του E.

- Εάν τα γεγονότα A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε η σχετική συχνότητα του γεγονότος $A \cup B$ είναι

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B$$

- Το f_A είναι συνάρτηση του n και «συγκλίνει» στην πιθανότητα $P(A)$ καθώς $n \to \infty$.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A$$

Στην ιδιότητα 5) η σύγκλιση της σχετικής συχνότητας f_A στην πιθανότητα $P(A)$, καθώς $n\to\infty$, δεν ταυτίζεται απόλυτα με την έννοια της σύγκλισης στα μαθηματικά. Η σύγκλιση εδώ με μία πιθανολογική έννοια εκφράζει ότι η σχετική συχνότητα, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος E, τείνει να «σταθεροποιηθεί» κοντά σε κάποια ορισμένη τιμή. Δηλαδή, η σύγκλιση της f_A δεν είναι ένα μαθηματικό συμπέρασμα αλλά είναι απλά ένα εμπειρικό γεγονός.

Προφανώς, στην πράξη δεν μπορούμε ποτέ να επιτύχουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος όπως δίνεται από το όριο στην (2.3). Μπορούμε μόνο να κάνουμε μία εκτίμηση της $P(A)$ βασιζόμενοι σε ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων n.

Παράδειγμα 2.20 Στην ρίψη ενός νομίσματος ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης της κεφαλής $P(K)$; Η θεωρία σχετικής συχνότητας προσεγγίζει το πρόβλημα, ρίχνοντας το νόμισμα, ας πούμε, 100 φορές, κάτω από τις ίδιες συνθήκες, και μετά μετρούμε πόσες φορές εμφανίσθηκε η κεφαλή. Αν υποθέσουμε ότι η κεφαλή εμφανίσθηκε 45 φορές, τότε ο λόγος 45/100 χρησιμοποιείται σαν εκτίμηση της πιθανότητας $P(K)$ για το συγκεκριμένο νόμισμα. Παρόλο, που το νόμισμα είναι ομοιόμορφα ζυγισμένο δεν έχουμε 50 κεφαλές στις 100 ρίψεις. Με άλλα λόγια, δεν περιμένουμε να επιτύχουμε την ακριβή πιθανότητα από τα επαναλαμβανόμενα πειράματα. Παρόλα αυτά, εάν το νόμισμα είναι ομοιόμορφα ζυγισμένο, η σχετική συχνότητα θα μπορούσε να προσεγγίσει την αληθή πιθανότητα 1/2 καθώς αυξάνει ο αριθμός δοκιμών.

2.4.3 Υποκειμενική Θεωρία

Στην υποκειμενική θεωρία σαν πιθανότητα αναφέρεται μία μέτρηση της προσωπικής εμπιστοσύνης σε μία συγκεκριμένη πρόταση, όπως για παράδειγμα, η πίστη να κερδίσει τις βουλευτικές εκλογές ένα πολιτικό κόμμα. Σύμφωνα με αυτή την θεωρία, κάποιος αντιστοιχεί ένα βάρος μεταξύ μηδέν και ένα για ένα γεγονός, σύμφωνα με τον βαθμό της πίστης του για την πιθανή πραγματοποίηση του γεγονότος. Για παράδειγμα, εάν είναι δύο φορές σιγουρότερος για την πραγματοποίηση του γεγονότος A από ότι είναι για το γεγονός B, και εάν A και B είναι τα μόνα πιθανά γεγονότα, προκύπτουν οι πιθανότητες $P(A)=2/3$ και $P(B)=1/3$. Γενικά, οι υποκειμενικές πιθανότητες για διάφορα γεγονότα που σχετίζονται με δεδομένη πρόταση, είναι βάρη με άθροισμα την μονάδα.

Συμπερασματικά, οι τρεις ερμηνείες της πιθανότητας αποτελούν η μία συμπλήρωμα της άλλης. Κάποιος χρησιμοποιεί την καταλληλότερη για τις συνθήκες και το πείραμα τύχης. Παρόλα αυτά, οι θεωρίες που έχουν αναφερθεί δεν είναι αρκετές για να στηρίξουν μία ολοκληρωμένη μαθηματική θεωρία πιθανότητας έτσι ώστε να είναι εφικτή η εύρεση πιθανότητας οιουδήποτε σύνθετου γεγονότος. Στην κλασσική θεωρία, η δυσκολία απαρίθμησης των δειγματοσημείων εξαρτάται από το πόσο σύνθετο είναι το πείραμα τύχης ή το γεγονός. Επίσης σε μερικές περιπτώσεις, δεν τεκμηριώνεται ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Στην θεωρία σχετικής συχνότητας, η εύρεση πιθανότητας εξαρτάται από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος. Συνήθως, δεν γνωρίζουμε πόσο μεγάλος πρέπει να είναι ο αριθμός δοκιμών έτσι ώστε η σχετική συχνότητα να προσεγγίσει την αληθή τιμή. Κατά συνέπεια, μέχρι τώρα δεν αναφέρθηκε μία ολοκληρωμένη θεωρία πιθανότητας βάση της οποίας θα υπολογίζεται τεκμηριωμένα η πιθανότητα ενός γεγονότος.

Οι ατέλειες αυτές εξέλιπαν μετά την παρουσίαση μιας αξιωματικής μεθόδου θεμελίωσης της πιθανοθεωρίας από τον Ρώσο μαθηματικό **Kolmogorov** το **1933**, η οποία έγινε έκτοτε ευρύτερα αποδεκτή. Όμως, στην αξιωματική θεώρηση των εννοιών της πιθανοθεωρίας που θα αναπτύξουμε παρακάτω θα πρέπει κανείς, να έχει πάντα υπόψη του την πρακτική ερμηνεία τους μέσω της έννοιας της κλασικής μεθόδου και σχετικής συχνότητας.

Στην επόμενη παράγραφο αναφέρονται τρία βασικά αξιώματα πιθανότητας (αξιώματα Kolmogorov) στα οποία στηρίζεται η πλέον δυναμικότερη και αποτελεσματικότερη θεωρία πιθανότητας.

2.5 ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Υποθέτουμε, ότι E είναι ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο S και S^* το δυναμοσύνολο που περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα ή γεγονότα, $S^*=\{A_1, A_2, \ldots\}$. Μια συνάρτηση $\boldsymbol{P}$ ορισμένη στο S^* καλείται **συνάρτηση πιθανότητας** αν αντιστοιχεί σε κάθε γεγονός $A_\kappa \in S^*$ ένα πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{P(A_\kappa)}$, ο οποίος καλείται **πιθανότητα** του γεγονότος A_κ, και δεχόμαστε ότι πληροί τα ακόλουθα αξιώματα.

○○● Αξιώματα

I. Η πιθανότητα για κάθε γεγονός $\boldsymbol{A_\kappa \in S^*}$ υπάρχει και περιορίζεται μεταξύ του μηδέν και ένα,

$$\mathbf{0 \le \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_\kappa}) \le 1}$$

II. Η πιθανότητα του γεγονότος *S* είναι ένα,

$$\boldsymbol{P(S) = 1}$$

Είναι παραδεκτό στην θεωρία πιθανότητας, ότι ένα γεγονός λέγεται ότι συνέβη, εάν τουλάχιστον ένα από τα δειγματοσημεία του έχει συμβεί. Όταν εκτελείται ένα πείραμα, είμαστε βέβαιοι ότι τουλάχιστον ένα από δειγματοσημεία του *S* πρέπει να συμβεί, και ως εκ τούτου η πιθανότητα που σχετίζεται με το *S* είναι ένα.

III. Εάν A_κ και A_λ είναι δύο γεγονότα οριζόμενα στον ίδιο δειγματικό χώρο *S*, A_κ, $A_\lambda \in S^*$ ξένα μεταξύ τους, δηλαδή, $\boldsymbol{A_\kappa \cap A_\lambda = \varnothing}$, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{P(A_\kappa \cup A_\lambda) = P(A_\kappa) + P(A_\lambda)}$$

Η σπουδαιότητα αυτού του αξιώματος είναι προφανής. Εάν με κάποια διαδικασία, αντιστοιχούμε μια πιθανότητα σε κάθε δειγματοσημείο του *S*, τότε επιτυγχάνουμε την πιθανότητα οιουδήποτε γεγονότος ορισμένο στο *S*, προσθέτοντας τις επί μέρους πιθανότητες όλων των δειγματοσημείων, που ανήκουν στο γεγονός αυτό.

Η τριάδα ($\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S^*}$, **P**) λέγεται **χώρος πιθανοτήτων**.

○○●

Η επιλογή των παραπάνω αξιωμάτων πιθανότητας προφανώς προέρχεται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της σχετικής συχνότητας. Οι αριθμοί $P(A)$ και f_A είναι πολύ «κοντά» ο ένας στον άλλον, εφόσον η σχετική συχνότητα f_A βασίζεται σε ένα μεγάλο αριθμό επανάληψης του πειράματος *E*. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί την χρήση του $P(A)$ για την μέτρηση του πόσο πιθανό είναι να συμβεί το *A*.

Μέχρι τώρα δεν γνωρίζουμε πώς να υπολογίζουμε την πιθανότητα $P(A)$. Αναφέραμε απλώς τις βασικές της ιδιότητες τις οποίες παραδεχόμαστε ως αξιώματα. Με βάση αυτά τα αξιώματα αποδεικνύονται στη συνέχεια εφτά βασικά θεωρήματα τα οποία αποτελούν τα σπουδαιότερα εργαλεία για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(A)$.

○○● **Θεώρημα 2.1** **Εάν $\boldsymbol{\varnothing}$, $\boldsymbol{\varnothing \in S^*}$, είναι το κενό σύνολο, τότε**

$$P(\varnothing) = 0 \tag{2.4}$$

Απόδειξη Για κάθε γεγονός $\boldsymbol{A \in S^*}$ ισχύει, $A = A \cup \varnothing$. Εφόσον τα *A* και $\varnothing$ είναι αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα, από το τρίτο αξίωμα συνεπάγεται ότι

$$P(A)=P(AU\varnothing)=P(A)+P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing)=0$$

Παρατήρηση

Το γεγονός $\boldsymbol{\varnothing}$ καλείται και **αδύνατο** γεγονός. Το αντίστροφο του θεωρήματος (2.1) δεν ισχύει. Όταν ένα γεγονός έχει μηδενική πιθανότητα, $P(A)=0$, δεν σημαίνει ότι το A είναι το αδύνατο γεγονός ή ότι είναι το κενό σύνολο.

◆◆◆

○○● **Θεώρημα 2.2** **Εάν $\overline{A}$ είναι το συμπληρωματικό γεγονός του $A\in S^*$ τότε ισχύει**

$$\boldsymbol{P(A)=1-P(\overline{A})} \tag{2.5}$$

Απόδειξη Ο δειγματικός χώρος S μπορεί να γραφεί,

$$S=A\cup\overline{A}$$

Επειδή τα γεγονότα A και $\overline{A}$ είναι ξένα μεταξύ τους, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα 1 και 2 επιτυγχάνουμε

$$1=P(A)+P(\overline{A})$$

Το θεώρημα αυτό είναι πάρα πολύ χρήσιμο, όπως θα δούμε παρακάτω. Σε πολλά προβλήματα όταν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A)$, ενδέχεται να είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός της πιθανότητας του συμπληρωματικού γεγονότος $\overline{A}$, $P(\overline{A})$, και στη συνέχεια την αφαιρούμε από την μονάδα.

○○●

○○● **Θεώρημα 2.3** **Εάν A και B είναι δύο γεγονότα οριζόμενα στον ίδιο δειγματικό χώρο, A $B\in S^*$, έτσι ώστε $A\subset B$, τότε**

$$\boldsymbol{P(A)\le P(B)}$$

Απόδειξη: Το γεγονός B είναι η ένωση των δύο ξένων γεγονότων A και B-A, $B = AU(B\text{-}A)$, άρα χρησιμοποιώντας το τρίτο αξίωμα έχουμε

$$P(B)=P\left[A\cup(B-A)\right]=P(A)+P(B-A)$$

και επειδή από το πρώτο αξίωμα ισχύει $P(B-A)\ge 0$ συνεπάγεται ότι $P(A)\le P(B)$.

○○●

Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ λογικό. Διότι αυτό λέει ότι εάν το γεγονός B πρέπει να συμβαίνει οποτεδήποτε συμβαίνει το A, το B είναι τουλάχιστον πιθανό όσο και το A.

○○● Θεώρημα 2.4 **Εάν A και B είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματοχώρου S, A, $B \in S^*$, ισχύει**

$$\boldsymbol{P(B\text{-}A) = P(B)\text{-}P(A \cap B)} \tag{2.6}$$

Απόδειξη: Το γεγονός B είναι η ένωση των δύο ξένων γεγονότων $A \cap B$ και $B\text{-}A$, Β = $(A \cap B) U (B\text{-}A)$, και λόγω του τρίτου αξιώματος έχουμε

$$P(B)=P[(A \cap B)U(B\text{-}A)]=P(A \cap B)+P(B\text{-}A)$$

και μετά από αυτό το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι προφανές.

Το θεώρημα 2.4 μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερα γεγονότα όπως ακολουθεί αμέσως παρακάτω.

○○●

○○● Θεώρημα 2.5 **Εάν A, B και Γ είναι τρία γεγονότα ορισμένα στον ίδιο δειγματικό χώρο, A B $\Gamma \in S^*$, τότε**

$$P[A-(B \cup \Gamma)] = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} P[A-(B \cup \Gamma)] &= P(A) - P[A \cap (B \cup \Gamma)] \\ &= P(A) - P[(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)] \\ &= P(A) - [P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \end{aligned}$$

○○●

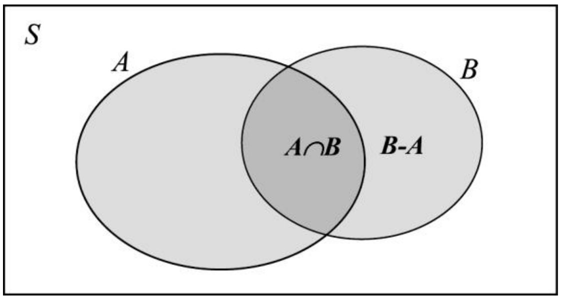
○○● Θεώρημα 2.6 **Για κάθε δύο γεγονότα A και B ορισμένα στον ίδιο δειγματικό χώρο, A $B \in S^*$, ισχύει**

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{2.7}$$

Απόδειξη: Η ένωση του A και B, AUB, είναι ισοδύναμη με την ένωση των αμοιβαίως αποκλειόμενων γεγονότων A και $B\text{-}A$, βλέπε Σχήμα 2.8,

$$A \cup B = A \cup (B - A),$$

χρησιμοποιώντας το αξίωμα 3 έχουμε,



Σχήμα 2.8

Διάγραμμα Venn για δύο γεγονότα *A*, *B*.

$$P(AUB)=P[AU(B\text{-}A)]=P(A)+P(B\text{-}A)$$

και αντικαθιστώντας την πιθανότητα της διαφοράς από το θεώρημα 2.4 προκύπτει,

$$P(AUB)=P(A)+P(B-A)\ =P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

○○●

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος 2.6 καλείται επίσης και **προσθετικός κανόνας**. Παριστάνει μία προφανή επέκταση του αξιώματος ΙΙΙ, διότι εάν $A\cap B=\emptyset$, η τελευταία σχέση οδηγεί στο αξίωμα ΙΙΙ. Επί πλέον, με την βοήθεια του Σχήματος 2.8, ο προσθετικός κανόνας γίνεται εύκολα κατανοητός. Προσθέτοντας τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$, η πιθανότητα της τομής $P(A\cap B)$ συμπεριλαμβάνεται δύο φορές, για αυτό αφαιρείται μία φορά από το άθροισμα.

○○● **Θεώρημα 2.7** **Εάν *A*, *B* και *Γ* είναι τρία γεγονότα ορισμένα στον ίδιο δειγματικό χώρο, *A B Γ*∈ S^*, τότε**

$$\boldsymbol{P(AUBU\Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A\cap B)-P(A\cap \Gamma)-P(B\cap \Gamma)+P(A\cap B\cap \Gamma)} \qquad (2.8)$$

Απόδειξη: Το θεώρημα αποδεικνύεται εύκολα αν γράψει κανείς την ένωση *AUBUΓ* σαν την ένωση δύο γεγονότων *A* και *BUΓ*, *AU*(*BUΓ*), και εφαρμόσει στη συνέχεια τον παραπάνω προσθετικό κανόνα (2.7). Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη για εξάσκηση.

○○●

Ο **προσθετικός κανόνας** μπορεί να επεκταθεί σε όσα γεγονότα θέλουμε. Μία γενίκευση του προσθετικού κανόνα, όπως αποδεικνύεται με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, είναι η ακόλουθη. Εάν A_1, A_2, ..., A_n είναι n γεγονότα ορισμένα στον ίδιο δειγματικό χώρο, τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \qquad (2.9)$$

Παρατήρηση

Εάν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι n γεγονότα ορισμένα στον ίδιο δειγματικό χώρο, και είναι μεταξύ τους αμοιβαίως αποκλειόμενα ή **ασυμβίβαστα** ανά δύο, ανά τρία, …, ανά n, ο προσθετικός κανόνας απλουστεύεται ως ακολούθως,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

Παράδειγμα 2.21 Σε ένα εργαστήριο ελέγχονται δείγματα νερού από ένα ποταμό για να διαπιστωθεί η ύπαρξη βλαβερών ουσιών (*βαρύ μέταλλο*, *μόλυβδος* ή *υδράργυρος*). Από το παρελθόν είναι γνωστό ότι από τα δείγματα, τα οποία παίρνονται από μία περιοχή όπου μεγάλα εργοστάσια ρίχνουν τα απόβλητά τους,

- 36% περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόλυβδο,
- 20% περιέχει σε τοξικό επίπεδο υδράργυρο,
- 12% περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόλυβδο και υδράργυρο.

Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα νερού από τη ίδια περιοχή του ποταμού,

(α) ποια η πιθανότητα ότι θα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόνο μόλυβδο;
(β) ποια η πιθανότητα ότι δεν θα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόλυβδο ή υδράργυρο;
(γ) ποια η πιθανότητα ότι θα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόνο ένα από τα επικίνδυνα μέταλλα;

Απάντηση: Συμβολίζω με Y το γεγονός ότι το δείγμα περιέχει σε τοξικό επίπεδο υδράργυρο και με M το γεγονός ότι το δείγμα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόλυβδο. Μας δίνεται ότι

$$P(Y) = 0{,}20, \quad P(M) = 0{,}36, \quad P(M \cap Y) = 0{,}12$$

(α) Το γεγονός ότι το δείγμα περιέχει μόλυβδο και όχι υδράργυρο συμβολίζεται με την διαφορά M-Y. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με το θεώρημα 2.4, είναι

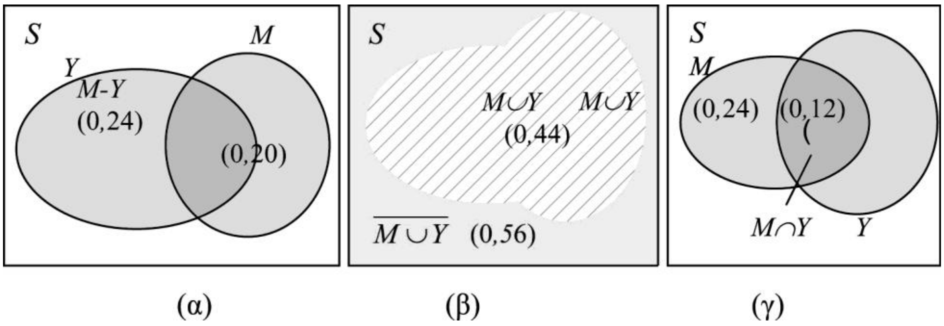
$$P(M - Y) = P(M) - P(M \cap Y) = 0{,}36 - 0{,}12 = 0{,}24$$

(β) Το γεγονός ότι το δείγμα δεν θα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόλυβδο ή υδράργυρο είναι το συμπλήρωμα του γεγονότος ότι θα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόλυβδο ή υδράργυρο. Δηλαδή, συμβολίζεται σαν

$$\overline{M \cup Y}$$

Σχήμα 2.9

Διαγράμματα Venn και οι αντίστοιχες πιθανότητες



και η πιθανότητά του υπολογίζεται με το θεώρημα 2.2 και τον προσθετικό κανόνα.

$$P(\overline{M \cup Y}) = 1 - P(M \cup Y) = 1 - [P(M) + P(Y) - P(M \cap Y)]$$
$$= 1 - 0,36 - 0,20 + 0,12 = 1 - 0,44 = 0,56$$

(γ) Το γεγονός ότι το δείγμα περιέχει σε τοξικό επίπεδο μόνο ένα από τα μέταλλα συμβολίζεται με την ένωση

$$(M - Y) \cup (Y - M)$$

Άρα, ακολουθώντας τον προσθετικό κανόνα και την πιθανότητα διαφοράς δύο γεγονότων (θεώρημα 2.4), η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P[(M - Y) \cup (Y - M)] = P(M - Y) + P(Y - M)$$
$$= P(M) - P(M \cap Y) + P(Y) - P(Y \cap M)$$
$$= 0,36 - 0,12 + 0,20 - 0,12 = 0,32$$

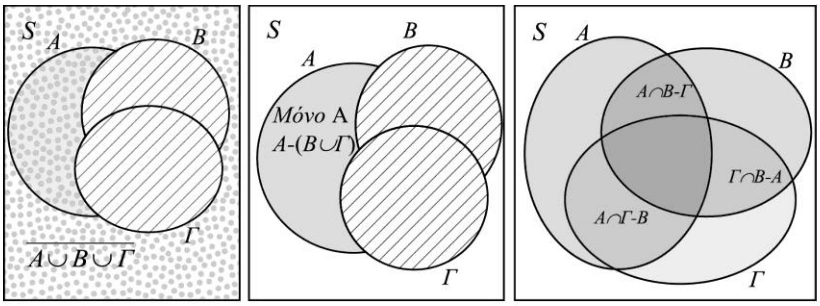
Παράδειγμα 2.22 Σε μία πόλη τρείς από τις εφημερίδες που κυκλοφορούν είναι οι Α, Β, και Γ. Είναι γνωστό ότι από τους κατοίκους:

– το 20% διαβάζει την Α,
– το 16% διαβάζει την Β,
– το 14% διαβάζει την Γ,
– το 8% διαβάζει την Α και Β, το 5% διαβάζει την Α και Γ, το 4 % διαβάζει Β και Γ, το 2% διαβάζει την Α, Β και Γ.

Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία από την πόλη, υπολογίστε την πιθανότητα ότι:

(α) δεν διαβάζει καμία από τις παραπάνω εφημερίδες,
(β) διαβάζει μόνο την εφημερίδα Α,
(γ) διαβάζει μόνο δύο εφημερίδες.

Απάντηση: Έστω τα γεγονότα



(α) Καμία από τις Α, Β, Γ (β) Μόνο Α (γ) Ακριβώς δύο από τις Α, Β, Γ

Σχήμα 2.10

Παράδειγμα 2.22, επεξήγηση γεγονότων με διάγραμμα **Venn**

– *A*={*το άτομο διαβάζει την εφημερίδα* Α},

– *B*={*το άτομο διαβάζει την εφημερίδα* Β},

– *Γ*={*το άτομο διαβάζει την εφημερίδα* Γ}.

Τα παραπάνω ενδεχόμενα μπορούν να συμβολισθούν με άλγεβρα γεγονότων ως εξής

– δεν διαβάζει καμία από τις παραπάνω εφημερίδες: $\overline{A \cup B \cup \Gamma}$

– διαβάζει μόνο την $A : A - (B \cup \Gamma)$

– διαβάζει μόνο δύο εφημερίδες:

$$(A \cap B - \Gamma) \cup (A \cap \Gamma - B) \cup (B \cap \Gamma - A)$$

(α) Από το θεώρημα 2.2 προκύπτει,

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B \cup \Gamma}) &= 1 - P(A \cup B \cup \Gamma) = 1 - (0,20 + 0,16 + 0,14 - 0,08 - 0,04 - 0,05 + 0,02) \\ &= 1 - 0,35 = 0,65. \end{aligned}$$

(β) Πρέπει να τονίσουμε ότι στο γεγονός *A* (κάποιος διαβάζει την εφημερίδα Α) δεν σημαίνει ότι διαβάζει μόνο την Α. Ενδέχεται να διαβάζει την Β ή και την Γ κ.τ.λ. Με βάση τον κανόνα της διαφοράς (θεώρημα 2.5) και τα δεδομένα, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα,

$$\begin{aligned} P[A-(B\cup\Gamma)] &= P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)+P(A\cap B\cap\Gamma) \\ &= 0,20-0,08-0,05+0,02=0,09 \end{aligned}$$

(γ) Εδώ, αν παρατηρήσουμε το σχεδιάγραμμα Venn, καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για την πιθανότητα της ένωσης των γεγονότων $A\cap B\text{-}\Gamma$, $A\cap\Gamma\text{-}B$, $\Gamma\cap B\text{-}A$. Έτσι, εφαρμόζοντας τον προσθετικό κανόνα και μετά την πιθανότητα διαφοράς, έχουμε,

$$\begin{aligned} &P[(A\cap B-\Gamma)\cup(A\cap\Gamma-B)\cup(B\cap\Gamma-A)] = P(A\cap B-\Gamma)+P(A\cap\Gamma-B)+P(B\cap\Gamma-A) \\ &= P(A\cap B)-P(A\cap B\cap\Gamma)\ +P(A\cap\Gamma)-P(A\cap\Gamma\cap B)+P(B\cap\Gamma)-P(B\cap\Gamma\cap A) \\ &= 0,08-0,02+0,05-0,02+0,04-0,02\ =\ 0,11 \end{aligned}$$

2.6 ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Στον υπολογισμό της πιθανότητας $P(A)$ με την κλασσική μέθοδο, $P(A) = n_A/n_S$, όπου n_A είναι ο αριθμός όλων των δυνατών τρόπων, με τους οποίους μπορεί να συμβεί το A ενώ n_S είναι ο ολικός αριθμός των αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης. Στα παραδείγματα που αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής, σχετικά εύκολα απαριθμήθηκαν τα n_A και n_S. Όμως, σε πιο σύνθετες περιπτώσεις είναι συχνά απαραίτητο να απαριθμήσουμε ένα μεγάλο αριθμό τρόπων ή στοιχείων και χρειαζόμαστε συστηματική αρίθμηση ή διαδικασία απαρίθμησης.

Για παράδειγμα, εάν τραβήξουμε τυχαία πέντε κάρτες από μία τράπουλα, χωρίς να τις επανατοποθετούμε στην τράπουλα, ποία η πιθανότητα ότι θα πάρουμε ακριβώς δύο άσσους; Για να απαντήσουμε στην ερώτηση με την κλασσική μέθοδο πρέπει να απαριθμήσουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου που είναι όλες οι δυνατές πεντάδες, όπως (A καρό, K κούπα, Q κούπα, J σπαθί, 10 κούπα), και στη συνέχεια να απαριθμήσουμε εκείνες που περιέχουν ακριβώς δύο άσσους.

Στο παράδειγμα αυτό δεν χρειάζεται να αναγραφούν όλες οι δυνατές πεντάδες, το οποίο θα ήταν και δύσκολο. Ευτυχώς, στον προσδιορισμό της πιθανότητας του γεγονότος, με την κλασσική μέθοδο, συχνά χρειαζόμαστε μόνο τον ολικό αριθμό των στοιχείων του συνόλου S ή του συνόλου του γεγονότος. Αποτελεσματικές τεχνικές για την απαρίθμηση τόσο πολλών στοιχείων είναι διαθέσιμες και είναι γνωστές σαν «μεταθέσεις» και «συνδυασμοί» και στηρίζονται σε ένα πολύ απλό κανόνα – ο κανόνας του γινομένου.

2.6.1 Ο Κανόνας του Γινομένου

Ένα σύνθετο πείραμα E συνίσταται στην εκτέλεση κ απλών πειραμάτων, E_1, E_2, ..., E_κ, των οποίων οι αντίστοιχοι δειγματοχώροι είναι S_1, S_2, ..., S_κ. Ο δειγματικός χώρος S του πειράματος E, ο οποίος περιέχει όλα τα πιθανά αποτελέσματα του σύνθετου πειράματος E (βλέπε παράγραφο 2.1, σύνθετος δειγματοχώρος), προκύπτει από το **καρτεσιανό γινόμενο**,

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_\kappa$$

Έτσι, ο **σύνθετος δειγματοχώρος** $\boldsymbol{S}$ περιέχει σαν δειγματοσημεία τα διατεταγμένα σύνολα,

$$S = \left\{ (s_{1\lambda}, s_{2\mu}, s_{\kappa\nu}) \middle| s_{1\lambda} \in S_1,\ s_{2\mu} \in S_2, \ldots, s_{\kappa\nu} \in S_\kappa,\ \lambda = 1, 2, \ldots, n_1, \right.$$
$$\left. \mu = 1, 2, \ldots, n_2,\ \nu = 1, 2, \ldots, n_\kappa \right\}$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω σκεπτικού είναι ότι το πλήθος, n, όλων των δυνατών αποτελέσματα του E είναι ο **κανόνας του γινομένου**,

$$n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_\kappa \qquad (2.10)$$

όπου n_1, $n_2, \ldots, n_\kappa$ παριστάνουν αντίστοιχα τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων (πληθάριθμους) των κ απλών δειγματοχώρων S_1, $S_2, \ldots,$ S_κ.

Παράδειγμα 2.23 Εάν για την κατασκευή ενός προϊόντος απαιτούνται τρία στάδια επεξεργασίας, όπου υπάρχουν 5, 6 και 2 ίδιες μηχανές για το κάθε στάδιο αντίστοιχα, πόσες είναι όλες οι δυνατές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει για την κατασκευή του μία μονάδα προϊόντος;

Απάντηση: Θεωρούμε ότι στο κάθε στάδιο επεξεργασίας εκτελείται ένα απλό πείραμα, όπου επιλέγουμε τυχαία μία από τις μηχανές του. Έτσι, το πρώτο στάδιο επεξεργασίας μπορεί να πραγματοποιηθεί με n_1=5 διαφορετικούς τρόπους, το δεύτερο με n_2=6 διαφορετικούς τρόπους και το τρίτο με n_3=2 διαφορετικούς τρόπους. Η επιλογή μίας διαδρομής της επεξεργασίας του προϊόντος αποτελεί το σύνθετο πείραμα E, όπου επιλέγεται μία μηχανή από κάθε στάδιο επεξεργασίας. Όλες οι προκύπτουσες δυνατές διαδρομές σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου 2.10 είναι

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 5 \times 6 \times 2 = 60 \text{ διαδρομές}$$

Παράδειγμα 2.24 Υπάρχουν σε μία τάξη 15 αγόρια και 18 κορίτσια. Πόσες διαφορετικές επιτροπές των δύο ατόμων μπορούμε να σχηματίσουμε, όπου θα υπάρχουν άτομα και των δύο φύλων σε κάθε επιτροπή;

Απάντηση: Για να σχηματίσουμε την επιτροπή (πείραμα E), επιλέγουμε ένα αγόρι (πείραμα E_1) και μετά ένα κορίτσι (Πείραμα E_2). Προφανώς, το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος E είναι σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου,

$$n = n_1 \times n_2 = 15 \times 18 = 270 \text{ επιτροπές}$$

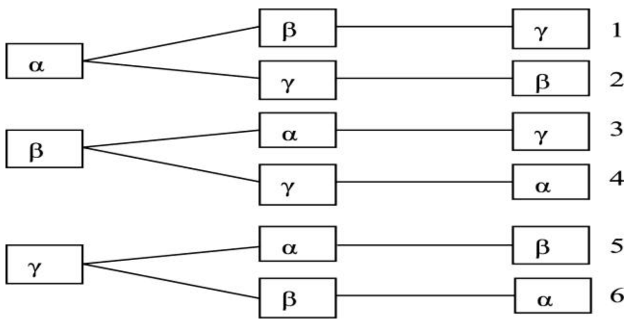
2.6.2 Μεταθέσεις

Συχνά, σε ένα σύνθετο πείραμα μας ενδιαφέρει το πλήθος όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε ***n*** διαφορετικά αντικείμενα σε μία σειρά. Αυτό επιτυγχάνεται με τον κανόνα του γινομένου όπως φαίνεται στα δύο επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.25 Έχουμε τρία γράμματα α, β, και γ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε μία σειρά;

Ένα απλό σκεπτικό είναι ότι η τοποθέτηση αυτή συνίσταται στην επιλογή ενός από τα τρία γράμματα α, β, γ για την πρώτη θέση (πείραμα E_1), μετά στην επιλογή ενός από τα υπόλοιπα δύο για την δεύτερη θέση (πείραμα E_2) και τέλος την τοποθέτηση του μόνου γράμματος που μένει στην τρίτη θέση (πείραμα E_3). Από τον κανόνα του γινομένου (2.10) και την βοήθεια του Σχήματος 2.11 προκύπτει ότι όλοι οι δυνατοί είναι

$$n_1 \times n_2 \times n_3 = 3\times2\times1 = 6$$



Σχήμα 2.11

Το διάγραμμα δένδρου για τον αριθμό τρόπων τοποθέτησης τριών γραμμάτων α, β, και γ σε μία σειρά

Παράδειγμα 2.26 Υποθέτουμε ότι έχουμε *n* διαφορετικά αντικείμενα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε μία σειρά; Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση των *n* αντικειμένων σε *n* κουτιά αριθμούμενα 1,2,3,…, *n,* όπου στο κάθε κουτί τοποθετούμε μόνο ένα αντικείμενο.

1	2	3	.	.	.	*n*

Στο πρώτο κουτί μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα από τα *n* αντικείμενα (πείραμα E_1), δηλαδή με *n* διαφορετικούς τρόπους. Μετά την τοποθέτηση αυτή, στο δεύτερο κουτί τοποθετούμε ένα από τα υπόλοιπα (n-1) αντικείμενα(πείραμα E_2), παρόμοια το τρίτο κουτί μπορεί να πληρωθεί με (n-2) διαφορετικούς τρόπους (πείραμα E_3), το τέταρτο κουτί με (n-3) τρόπους (πείραμα E_4), και ούτω καθεξής. Έτσι, όλα τα δυνατά αποτελέσματα του σύνθετου πειράματος *E*, δηλαδή, ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε *n* αντικείμενα σε *n* κουτιά προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου,

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1 = n! \text{ (n παραγοντικό)}$$

◆◆◆

Γενικά, μία **μετάθεση** ενός αριθμού αντικειμένων είναι η τοποθέτηση των αντικειμένων αυτών σε μία ορισμένη σειρά. Ο αριθμός των **μεταθέσεων** ενός συνόλου από ***n*** αντικείμενα, λαμβάνοντάς τα όλα μαζί, όπως προκύπτει από την άμεση εφαρμογή του κανόνα του γινομένου είναι ***n*!.** Συμβολίζοντας αυτόν τον αριθμό και με ${}_{n}\boldsymbol{P}_{n}$ (*Permutations*), έχουμε

$$P_n = n! \tag{2.11}$$

όπου *n*! διαβάζεται « *n* παραγοντικό » και είναι το γινόμενο από όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το *n*, δηλαδή

$$n! = n(n-1)(n-2)...1 \tag{2.12}$$

Επίσης εδώ ορίζουμε 0! = 1.

Παράδειγμα 2.27 Πόσους δεκαψήφιους αριθμούς χωρίς επαναλαμβανόμενα ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, …, 8, 9;

Απάντηση: Ο ολικός αριθμός τοποθέτησης δέκα ψηφίων σε μία σειρά λαμβάνοντας και τα δέκα, σύμφωνα με τον κανόνα των μεταθέσεων (2.12), είναι

$$P(10,10)=10!=10\cdot 9\cdot 8\cdots 2\cdot 1=3.628.800$$

Όμως, στον αριθμό αυτόν περιλαμβάνεται και ο αριθμός των δεκαψήφιων, που αρχίζουν από μηδέν, τον οποίο πρέπει να αφαιρέσουμε από το 3.628.800. Το πλήθος των δεκαψηφίων που αρχίζουν από μηδέν είναι ο αριθμός των μεταθέσεων των ψηφίων 1, 2, 3, …, 9 που ακολουθούν μετά το μηδέν. Έτσι, όλοι οι δεκαψήφιοι που αρχίζουν με μηδέν είναι

$$P(9,\ 9)=9!=9\cdot 8\cdots 2\cdot 1=362.880$$

Άρα, ο ζητούμενος αριθμός είναι 3.628.800 – 362.880 = 3.265.920.

Το ίδιο αποτέλεσμα επιτυγχάνουμε αν σκεφθούμε ότι την πρώτη θέση δεν μπορεί να την πάρει ένα από τα δέκα ψηφία, αλλά ένα από τα εννέα ψηφία 1, 2, 3, …, 9, την δεύτερη θέση ένα από τα υπόλοιπα εννέα κ.ο.κ.. Έτσι, οι μεταθέσεις των δέκα ψηφίων με αυτόν τον περιορισμό είναι το γινόμενο $9\cdot 9\cdot 8\cdots 1=3.265.920$.

◆◆◆

Θεωρούμε και πάλι n διαφορετικά αντικείμενα. Αυτή τη φορά επιθυμούμε να επιλέξουμε r από αυτά, $0 \le r \le n$, και τα τοποθετήσουμε σε μία σειρά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό. Συμβολίζουμε με $P(n, r)$ τον αριθμό των μεταθέσεων n αντικειμένων, λαμβάνοντάς τα ανά r. Λαμβάνουμε και πάλι υπόψη το τελευταίο σκεπτικό με την τοποθέτηση n αντικειμένων σε r κουτιά αριθμούμενα 1, 2, 3, …, r, όπου το κάθε κουτί χωράει μόνο ένα αντικείμενο. Έτσι το πρώτο κουτί μπορεί να δεχθεί ένα από τα n αντικείμενα, το δεύτερο ένα από τα (n-1), το τρίτο ένα από τα (n-2), και ούτω κάθε εξής. Κατά συνέπεια η ολική διαδικασία μπορεί να εκπληρωθεί, πάλι με τον κανόνα του γινομένου, σε

$$n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

τρόπους. Χρησιμοποιώντας τον παραγοντικό συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.13}$$

Παράδειγμα 2.28 Υποθέτουμε ότι έχουμε εφτά δωμάτια και θέλουμε να δώσουμε από ένα σε τέσσερις προγραμματιστές και τα υπόλοιπα τρία να χρησιμοποιηθούν σαν εργαστήρια. Με πόσου διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό;

Απάντηση: Αριθμούμε τα δωμάτια από ένα μέχρι εφτά και παίρνουμε τέσσερα από αυτά και τα βάζουμε σε μία σειρά. Το πρώτο δίνεται στον Α προγραμματιστή, το δεύτερο στον Β, κ.ο.κ. Προφανώς, έχουμε τις μεταθέσεις εφτά στοιχείων παίρνοντάς τα ανά τέσσερα,

$$P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=840 \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

2.6.3 Συνδυασμοί

Στην περίπτωση αυτή, μας ενδιαφέρει να απαριθμήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε r από n αντικείμενα χωρίς να αναφερόμαστε στη σειρά. Για παράδειγμα, έχουμε τα αντικείμενα α, β, και γ, $n = 3$, και επιλέγουμε δύο από αυτά, $r = 2$. Επιθυμούμε να απαριθμήσουμε αβ, αγ, και βγ. Με άλλα λόγια, δεν απαριθμούμε αβ και βα εφόσον περιέχουν τα ίδια αντικείμενα και αλλάζει μόνο η σειρά.

Για να επιτύχουμε το γενικό αποτέλεσμα επικαλούμαστε τον κανόνα των μεταθέσεων n αντικειμένων λαμβάνοντάς τα ανά r, ο οποίος είναι $n!/(n-r)!$ Συμβολίζουμε με $C(n, r)$ τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε r

αντικείμενα από n, ασχέτως της σειράς (δηλαδή, C(n, r) είναι ο ζητούμενος αριθμός). Από r επιλεγέντα αντικείμενα προκύπτουν r! μεταθέσεις αυτών. Οπότε, εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα γινομένου, ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους παίρνουμε r από n αντικείμενα και τα βάζουμε σε μία σειρά είναι C(n, r) r!, και μαζί με τον παραπάνω κανόνα μεταθέσεων, επιτυγχάνουμε

$$C(n, r)r! = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Έτσι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε r από n αντικείμενα χωρίς να αναφερόμαστε στην σειρά, δίνεται από τον κανόνα

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{2.14}$$

Ο αριθμός αυτός χρησιμοποιείται συχνά στις πιθανότητες και είναι γνωστός σαν οι συνδυασμοί n αντικειμένων ανά r. Μερικές φορές χρησιμοποιείται και ένας άλλος συμβολισμός ή μπορεί η εξίσωση 2.14 να εκφραστεί ισοδύναμα όπως,

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

Οι αριθμοί

$$\binom{n}{r}$$

συχνά καλούνται διωνυμικοί συντελεστές, διότι εμφανίζονται ως συντελεστές στην ανάπτυξη της διωνυμικής έκφρασης $(\alpha+\beta)^n$,

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \alpha^r \beta^{n-r}$$

Άμεση σχέση με το τελευταίο αποτέλεσμα έχει και ο προσδιορισμός του αριθμού όλων των υποσυνόλων ενός δειγματικού συνόλου S, το οποίο περιέχει n δειγματοσημεία. Όπως αναφέρθηκε στην πρώτη παράγραφο, το πλήθος όλων των γεγονότων που μπορούν να ορισθούν σε ένα πείραμα τύχης είναι 2^n. Μπορούμε τώρα να τεκμηριώσουμε αυτό το αποτέλεσμα. Για να επιτύχουμε τα υποσύνολα πρέπει να επιλέξουμε το κενό σύνολο, εκείνα τα υποσύνολα που αποτελούνται από ένα δειγματοσημείο, εκείνα τα υποσύνολα που αποτελούνται από δύο δειγματο-σημεία, …, και τέλος το ίδιο το σύνολο που αποτελείται από n δειγματοσημεία. Αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

τρόπους. Οπωσδήποτε το άθροισμα αυτών των διωνυμικών συντελεστών είναι απλά η ανάπτυξη του

$$(1+1)^n = 2^n$$

Δύο από τις σπουδαιότερες **ιδιότητες** των διωνυμικών αριθμών αναφέρονται εδώ (τις οποίες ο αναγνώστης αν επιθυμεί μπορεί να αποδείξει σαν μία εξάσκηση):

1) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

2) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$

Η επιβεβαίωση των παραπάνω ταυτοτήτων γίνεται εύκολα, εφαρμόζοντας και στα δύο μέρη της εξίσωσης τον κανόνα (2.14).

Παράδειγμα 2.29 Μία ομάδα καλαθοσφαίρισης διαθέτει συνολικά 10 παίκτες. Ο προπονητής της ομάδας πρέπει να επιλέξει 5 παίκτες για κάποιον αγώνα.

(α) Πόσες διαφορετικές ομάδες των πέντε παικτών μπορεί να επιλεχθούν;

(β) Εάν ο κάθε παίκτης μπορεί να πάρει οιαδήποτε από τις πέντε διαφορετικές θέσεις του παιχνιδιού, πόσες διαφορετικές πεντάδες μπορούν να σχηματισθούν;

(γ) Πόσες διαφορετικές πεντάδες μπορούν να σχηματισθούν, αν δύο συγκεκριμένοι παίκτες θα συμμετέχουν οπωσδήποτε στην πεντάδα του αγώνα;

Απάντηση: (α) Εδώ δεν μας ενδιαφέρει η θέση που παίρνει ο παίκτης που επιλέγεται για την πεντάδα. Κατά συνέπεια, αυτό είναι ένα πρόβλημα συνδυασμών,

$$C(10,5)=\frac{10!}{(10-5)!5!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252 \text{ συνδυασμοί}$$

(β) Στην περίπτωση αυτή, μας ενδιαφέρει και η θέση που παίρνει ο παίκτης στην καλαθοσφαίριση, δηλαδή το πρόβλημα εδώ αναφέρεται στις μεταθέσεις,

$$P(10,5)=\frac{10!}{(10-5)!}=30.240 \text{ σχηματισμούς}$$

Παρατηρούμε ότι, όταν επιλέγεται μία πεντάδα, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των παικτών είναι

$$P(5,5) = 5! = 120 \text{ τρόποι}$$

Έτσι, έχουμε

30.240 σχηματισμοί=(252 πεντάδες)(120 μεταθέσεις για κάθε πεντάδα)

(γ) Επειδή δύο παίκτες από τους δέκα σίγουρα συμμετέχουν στην πεντάδα, ο προπονητής έχει να επιλέξει τρεις από τους υπόλοιπους οκτώ παίκτες,

$$C(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = 56 \text{ τρόπους}$$

Και τέλος οι σχηματισμοί είναι,

(56 πεντάδες)(120 μεταθέσεις για κάθε πεντάδα)=6.720 σχηματισμοί

Παράδειγμα 2.30 Ένα κιβώτιο ανταλλακτικών εξαρτημάτων περιέχει 80 καλά και 20 ελαττωματικά. Παίρνουμε τυχαία 10 ανταλλακτικά, χωρίς επανατοποθέτηση στο κιβώτιο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι τα μισά ακριβώς από τα επιλεγόμενα ανταλλακτικά είναι ελαττωματικά;

Απάντηση: Για να απαντήσουμε στο πρόβλημα πρέπει πρώτα να απαριθμήσουμε όλα τα δειγματοσημεία του δειγματικού χώρου S. Ο αριθμός όλων των δειγματοσημείων είναι ο αριθμός των διαφορετικών δεκάδων, που μπορούν να επιλεγούν από το κιβώτιο, $C(100, 10)$. Ανάμεσα σε αυτές τις δεκάδες πόσες έχουν ακριβώς πέντε ελαττωματικά ανταλλακτικά; Δηλαδή, πόσες διαφορετικές δεκάδες μπορούμε να κάνουμε επιλέγοντας 5 από τα 20 ελαττωματικά και 5 από τα 80 καλά ανταλλακτικά; Κάνοντας χρήση τον κανόνα του γινομένου ο αριθμός διαφορετικών τέτοιων δεκάδων είναι $C(20, 5)$ φορές τους $C(80, 5)$. Επειδή όλα τα αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα, ακολουθώντας την κλασσική θεωρία, η πιθανότητα ακριβώς 5 ελαττωματικών και 5 καλών ανταλλακτικών στα 10 επιλεγόμενα δίνεται από τον κανόνα

$$\frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = 0.021$$

Παρατηρήσεις

(A) Όταν επιλέγουμε r από τα n αντικείμενα συνήθως εννοούμε χωρίς επανατοποθέτηση, στην περίπτωση αυτή ο αριθμός διαφορετικών τρόπων είναι $C(n, r)$. Εάν η επιλογή r από τα n αντικείμενα γίνει με επανάθεση, τότε προφανώς έχουμε n^r διαφορετικούς τρόπους.

(B) Όταν πρόκειται να υπολογίσουμε το παραγοντικό ενός αρκετά μεγάλου αριθμού, πρέπει να γίνουν πολλές πράξεις. Μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε το αποτέλεσμα με τον τύπο του Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi e^{-n}}\, n^{n+1/2}$$

2.6.4 Μεταθέσεις όταν Όλα τα Αντικείμενα δεν είναι Ίδια

Αναφερθήκαμε μέχρι τώρα σε μεταθέσεις όπου όλα τα αντικείμενα είναι διαφορετικά. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε με τον αριθμό διαφορετικών τοποθετήσεων αντικειμένων όταν κάποια από αυτά είναι ολόιδια.

Εάν υπάρχουν n αντικείμενα, από τα οποία n_1 είναι ίδια, τότε ο αριθμός μεταθέσεων των n αντικειμένων, παίρνοντάς τα όλα μαζί, είναι $n_1!$ φορές λιγότερο από το $n!$. Διότι $n_1!$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων των n αντικειμένων, όπου αλλάζουν θέση μεταξύ τους μόνο τα n_1 αντικείμενα, ενώ τα υπόλοιπα n-n_1 παραμένουν στις ίδιες θέσεις τους. Όμως, τα n_1 αντικείμενα είναι ίδια και οι μεταθέσεις αυτές συμπίπτουν σε μία. Έτσι για τον αριθμό μεταθέσεων n αντικειμένων, από τα οποία n_1 είναι ίδια, έχουμε

$$P(n,n) = \frac{n!}{n_1!}$$

Παρόμοια, αν έχουμε n αντικείμενα, τα οποία χωρίζονται σε κ ομάδες ίδιων στοιχείων, δηλαδή, n_1 είναι ίδια, άλλα n_2 είναι ίδια, άλλα n_3 είναι ίδια, κ.ο.κ., έτσι ώστε $n = n_1+ n_2 + n_3 + \ldots + n_\kappa$, τότε ο αριθμός μεταθέσεων των n αντικειμένων δίνεται από τον τύπο

$$P(n,n) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!} \tag{2.15}$$

Για παράδειγμα, ένας φοιτητής πρόκειται να τοποθετήσει δέκα από τα βιβλία του σε ένα ράφι της βιβλιοθήκης του. Τα βιβλία έχουν διαφορετικά χρώματα. Τέσσερα είναι κόκκινα, τρία είναι μπλε, ένα είναι μαύρο, και δύο είναι λευκά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να τα τοποθετήσει; Εδώ, έχουμε n =10, n_1=4, n_2=3, n_3=1, n_4=2. Οπότε, από τον τύπο (2.15) η απάντηση είναι

$$\frac{10!}{4!3!1!2!} = 12.600$$

Παρατηρήσεις

(Α) Εάν όλα τα n αντικείμενα είναι διαφορετικά, τότε n_1=1, n_2=1, n_3=1, …, n_κ=1 και οι μεταθέσεις των n αντικειμένων, από τον τύπο (2.15), είναι $n!$

(Β) Επίσης, εάν υπάρχουν δύο είδη αντικειμένων, r από τα οποία είναι ίδια και n-r από τα οποία είναι ίδια, τότε έχουμε μία σημαντική περίπτωση του τύπου (2.15):

$$P(n, n) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r)$$

(Γ) Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός μεταθέσεων στην περίπτωση αυτή είναι ίδιος με τον αριθμό συνδυασμών n αντικειμένων παίρνοντάς τα ανά r. Το αποτέλεσμα αυτό επίσης τεκμηριώνει την προαναφερθείσα ιδιότητα:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Παράδειγμα 2.31 Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούν να καθίσουν πέντε αγόρια σε μία σειρά από 12 καθίσματα. Το πρόβλημα μπορούμε να το δούμε και σαν την τοποθέτηση 12 αντικειμένων, από τα οποία τα 5 αντιστοιχούν στα αγόρια και διαφέρουν μεταξύ τους ενώ τα υπόλοιπα 7 αντιστοιχούν στα ελεύθερα καθίσματα και είναι ίδια μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον τύπο (2.15), ο αριθμός των ζητούμενων τρόπων είναι

$$P(12,\ 12) = \frac{12!}{7!1!1!1!1!1!} = \frac{12!}{7!} = 95040$$