ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Η Μέθοδος των Δυνάμεων (ΜτΔ)

1.1 Μεθοδολογία επίλυσης υπερστατικών φορέων

Οι υπερστατικοί φορείς, η υπερστατικότητα των οποίων ορίζεται με τον βαθμό στατικής αοριστίας ή βαθμό υπερστατικότητας (n), δεν είναι δυνατόν να επιλυθούν με βάση τις τρεις συνθήκες ισορροπίας ΣΧ=0, ΣΥ=0 και ΣΜ=0 (ή ισοδύναμες) που μας παρέχει η κλασική στατική. Μπορούν όμως να επιλυθούν χρησιμοποιώντας δύο βασικές αρχές της στατικής, την Αρχή της Επαλληλίας και την Αρχή της Αποδέσμευσης (Αρχή της Απελευθέρωσης του Lagrange).

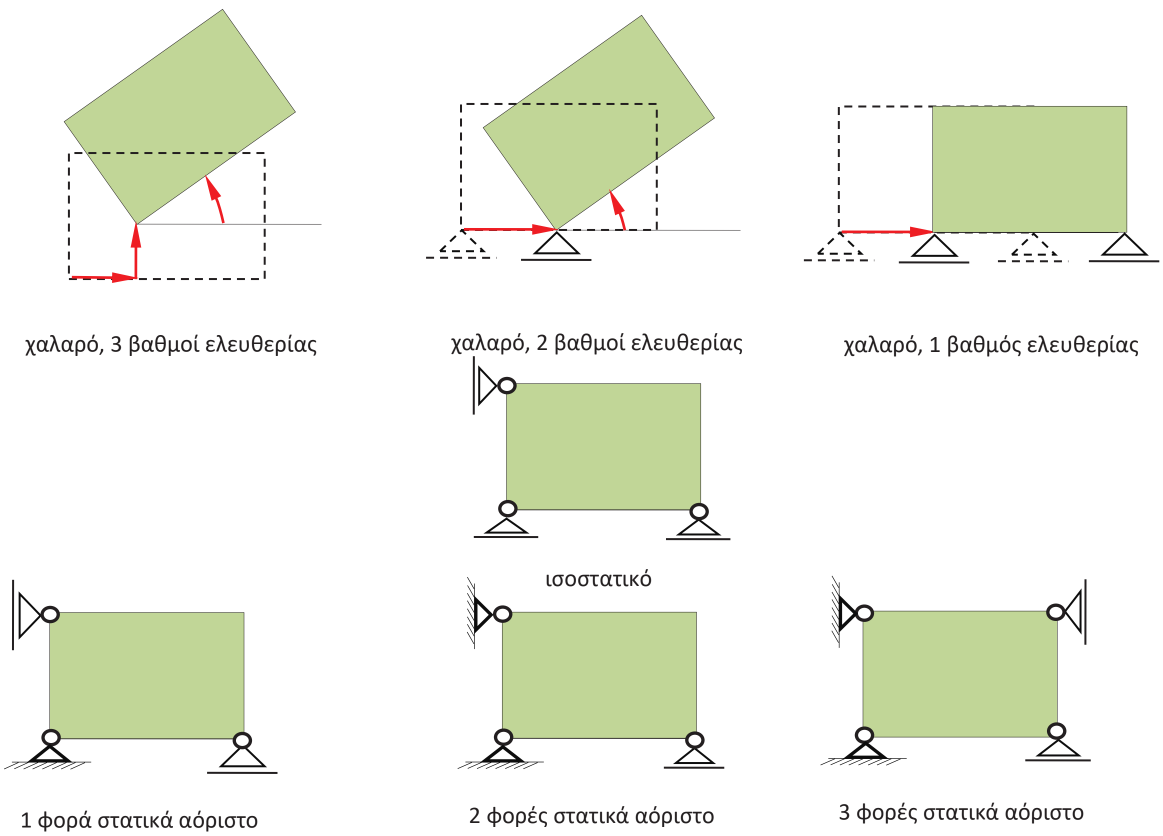
Στον υπερστατικό φορέα καταλύονται τόσες δεσμικές ράβδοι όσος είναι και ο βαθμός στατικής αοριστίας (n) μέχρις ότου ο αρχικός φορέας μετατραπεί σε ισοστατικό. Το υποκατάστατο σύστημα που προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο ονομάζεται **Κύριο Ισοστατικό Σύστημα** και χάριν συντομίας **ΚΙΣ,** η επιλογή του οποίου δεν είναι μονοσήμαντη. Ιδιαίτερα σε σύνθετους γραμμικούς φορείς η επιλογή ενός κατάλληλου ΚΙΣ (απλό στην επίλυσή του) απαιτεί καλή γνώση των ισοστατικών φορέων και των βασικών αρχών της στατικής, των τρόπων ελέγχου και αξιολόγησης των αποτελεσμάτων. Η επίλυση του υπερστατικού φορέα, τόσο για εξωτερικές φορτίσεις όσο και για καταναγκασμούς, ανάγεται σε διαδοχική επίλυση του ΚΙΣ που θα επιλεγεί μετά από σκέψη.

1.2 Μέθοδοι προσδιορισμού του βαθμού στατικής αοριστίας n

1.2.1 Μέθοδοι της σταδιακής δόμησης ή αποδόμησης

Για τον προσδιορισμό του βαθμού στατικής αοριστίας n (υπερστατικότητας) ενός σύνθετου γραμμικού φορέα συνιστάται η μέθοδος της σταδιακής δόμησης ή της σταδιακής αποδόμησης-αποδέσμευσης ως η πλέον εποπτική. Με τον τρόπο αυτό ελέγχεται αφενός η στερεότητα του φορέα, αφετέρου «ανακαλύπτεται» και το κατάλληλο κύριο σύστημα που πρέπει να επιλεγεί για την επίλυση του υπερστατικού φορέα με τη Μέθοδο των Δυνάμεων. Η εποπτικότητα της μεθόδου σχετίζεται και με τη δυνατότητα που παρέχεται στον χρήστη να κατανοήσει τον τρόπο που δομείται ένας σύνθετος φορέας, ξεκινώντας από έναν κατά βάση απλό φορέα, ισοστατικό ή υπερστατικό, του οποίου ο βαθμός υπερστατικότητας είναι γνωστός ή είναι εύκολα προσδιορίσιμος. Ο μετασχηματισμός του φορέα στην περίπτωση της σταδιακής δόμησης προκύπτει με τη διαδοχική προσθήκη εσωτερικών δεσμικών ράβδων ή εξωτερικών ράβδων στήριξης ενώ στην περίπτωση της αποδόμησης με τη διαδοχική αφαίρεση ράβδων. Κατά τη δόμηση, η προσθήκη μιας δεσμικής ράβδου αυξάνει κατά μια μονάδα το βαθμό στατικής αοριστίας καθώς και τον βαθμό στερεότητας. Το αντίθετο συμβαίνει κατά τη σταδιακή αποδέσμευση.

Στο Σχήμα 1.2-1 παρουσιάζεται η σταδιακή μετάβαση από ένα χαλαρό (κινητό) σώμα με βαθμό κινητότητας 3 (στατικά υπο-ορισμένο, 3 βαθμοί ελευθερίας, δύο μετακινήσεις και μία στροφή), με την προσθήκη κυλίσεων (κάθε κύλιση ισοδυναμεί σε μία ατενή δεσμική ράβδο) σε ένα ισοστατικό σύστημα και στη συνέχεια σε ένα υπερστατικό με βαθμό υπερστατικότητας ή στατικής αοριστίας n=1,2,3. Κάθε σταθερή στήριξη ισοδυναμεί με δύο ατενείς δεσμικές ράβδους. Διευκρινίζεται ότι στην περίπτωση της δημιουργίας του ισοστατικού συστήματος με τρεις κυλίσεις, οι διευθύνσεις των τριών ισοδύναμων δεσμικών ράβδων δεν πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο ούτε να είναι παράλληλες.



Σχήμα 1.2-1 Σταδιακή μετάβαση από ένα στατικά υπο-ορισμένο σύστημα (χαλαρό) σε ένα υπερστατικό

1.2.2 Η μέθοδος της απαρίθμησης

Ο βαθμός στατικής αοριστίας (n) προκύπτει αφαιρώντας, από το πλήθος των μεταβιβάσιμων εσωτερικών μεγεθών έντασης στα άκρα των δομικών στοιχείων και στους κόμβους, το πλήθος των διαθέσιμων γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων ισορροπίας των δομικών στοιχείων και των κόμβων. Κόμβοι θεωρούνται τα σημεία του φορέα στα οποία ο στατικός άξονας (κεντροβαρικός άξονας των δομικών του στοιχείων) διακλαδίζεται, καταλήγει σε ελεύθερο άκρο ή συναντά έναν μηχανισμό (π.χ. μηχανισμό ροπής, τέμνουσας ή αξονικής δύναμης).

Ράβδοι θεωρούνται τα τμήματα του φορέα μεταξύ δύο κόμβων ή μεταξύ ενός κόμβου και του εδάφους, όπου:

n_n το πλήθος των κόμβων (δεν συμπεριλαμβάνονται οι κόμβοι στήριξης)

n_s το πλήθος των δομικών στοιχείων
n_m το πλήθος των εσωτερικών μεγεθών έντασης τα οποία δεν μπορούν να μεταβιβαστούν στα άκρα δομικών στοιχείων όπου υπάρχουν μηχανισμοί (το πλήθος των συνθηκών ισορροπίας στις διάφορες αρθρώσεις, καμπτικές-διατμητικές-αξονικές που υπάρχουν μεταξύ των δομικών στοιχείων).

Βαθμός στατικής αοριστίας για ελεύθερους φορείς

$$n = (3 \cdot n_s - n_m + 3) - 3 \cdot n_n \tag{1.2-1}$$

Βαθμός στατικής αοριστίας για εδραζόμενους φορείς

$$n = (3 \cdot n_s - n_m) - 3 \cdot n_n \tag{1.2-2}$$

Απλοποίηση τύπου για δικτυώματα:
Ελεύθερα επίπεδα δικτυώματα

$$n = n_s - 2 \cdot n_n + 3 \tag{1.2-3}$$

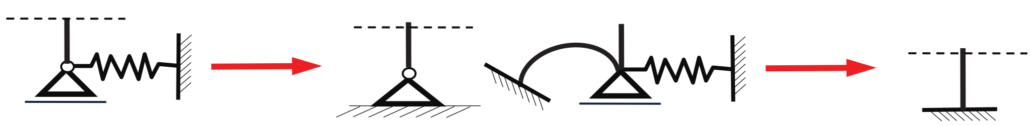
Εδραζόμενα επίπεδα δικτυώματα

$$n = n_s - 2 \cdot n_n \tag{1.2-4}$$

Κυλίσεις αντικαθίστανται με μια δεσμική ράβδο, σταθερές στηρίξεις που δεν βρίσκονται σε άκρο ενός δομικού στοιχείου αντικαθίστανται με δύο δεσμικές ράβδους. Η κύλιση ισοδυναμεί με μια δεσμική ράβδο (ράβδο με άπειρη δυστένεια).

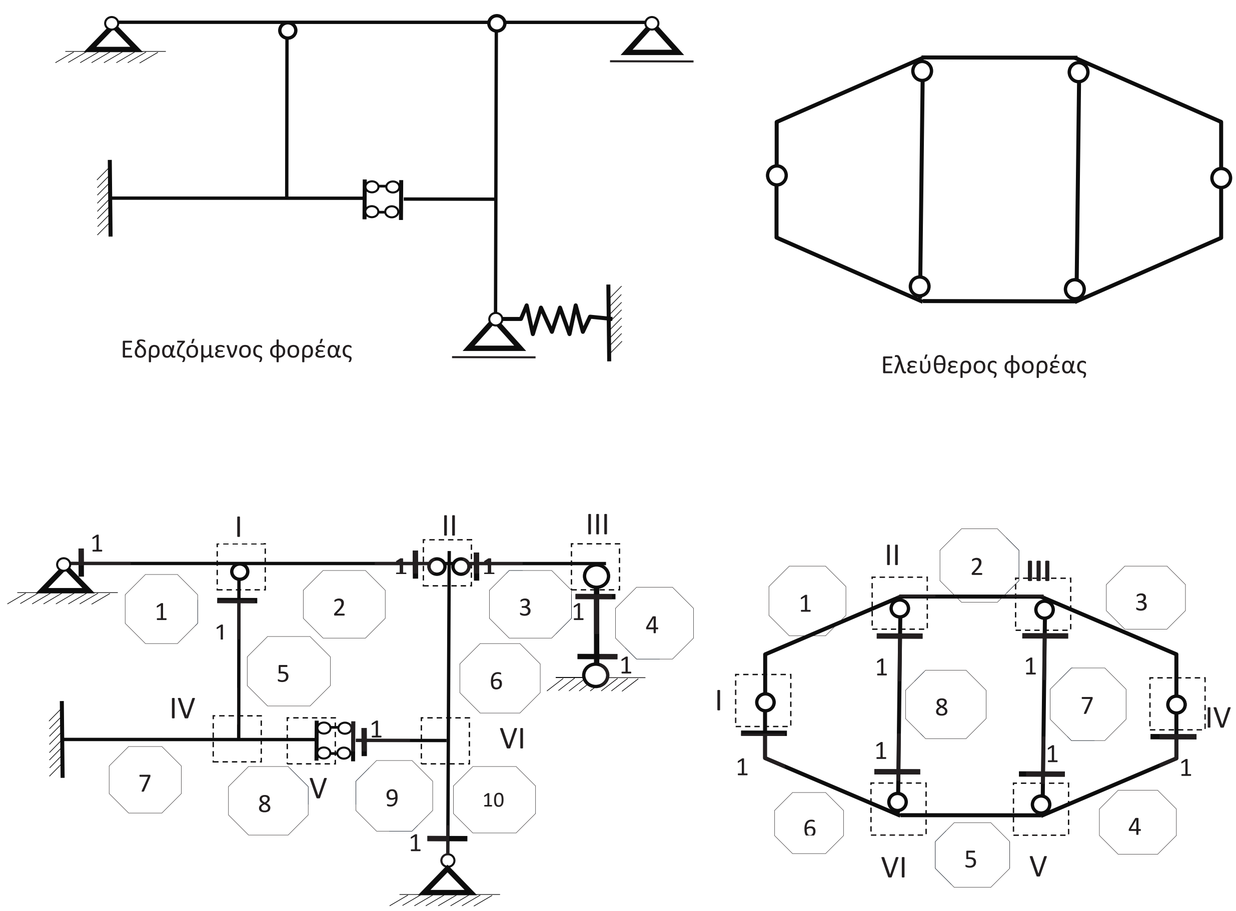
Εάν στην κύλιση συνδέεται επιπλέον και ένα γραμμικό ελατήριο, επομένως, εκτός της αντίδρασης κάθετα στη διεύθυνση της κύλισης, υφίσταται και η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο (οριζοντίως ελαστική στήριξη), τότε στο πλαίσιο προσδιορισμού της στατικής αοριστίας, όλος ο σύνδεσμος ισοδυναμεί με μια σταθερή στήριξη. Εάν επιπλέον στο ίδιο σημείο είναι συνδεδεμένο και ένα στροφικό ελατήριο, ο σύνδεσμος ισοδυναμεί με μια πλήρη πάκτωση. Από γεωμετρική άποψη όμως στην πρώτη περίπτωση εξακολουθεί να υφίσταται ο βαθμός ελευθερίας της οριζόντιας κίνησης που καθορίζεται από το γραμμικό ελατήριο (ελαστική δρομική δεσμική ράβδο) ενώ στη δεύτερη περίπτωση εξακολουθεί να υφίσταται τόσο η οριζόντια κινητότητα που καθορίζεται από το γραμμικό (δρομικό) ελατήριο όσο και η στροφή που καθορίζεται από το στροφικό ελατήριο (ελαστική στροφική ράβδο).

Σχήμα 1.2-2 Ισοδυναμία στηρίξεων



Σχήμα 1.2-2 (συνέχ.) Ισοδυναμία στηρίξεων

Παράδειγμα 1



Σχήμα 1.2-3 Παραδείγματα για τη μέθοδο της απαρίθμησης

$$n_n = VI,\ \ n_s = 10,\ \ n_m = 8$$
$$n = (3\cdot 10 - 8) - 3\cdot 6 = 4$$

$$n_n = VI,\ \ n_s = 8,\ \ n_m = 6$$
$$n = (3\cdot 8 - 6 + 3) - 3\cdot 6 = 3$$

Στο παραπάνω παράδειγμα με λατινικούς αριθμούς συμβολίζονται οι κόμβοι (I-VI). Οι αριθμοί δίπλα στις εσωτερικές αρθρώσεις – καμπτικές-διατμητικές, αξονικές αλλά και στις στηρίξεις – δηλώνουν το πλήθος των εντασιακών μεγεθών που δεν μπορούν να μεταβιβαστούν (πλήθος των βαθμών ελευθερίας). Οι αριθμοί σε οκταγωνικό πλαίσιο δηλώνουν το πλήθος των δομικών στοιχείων του φορέα.

Άλλος τρόπος εφαρμογής του κριτηρίου απαρίθμησης (για εδραζόμενους φορείς)

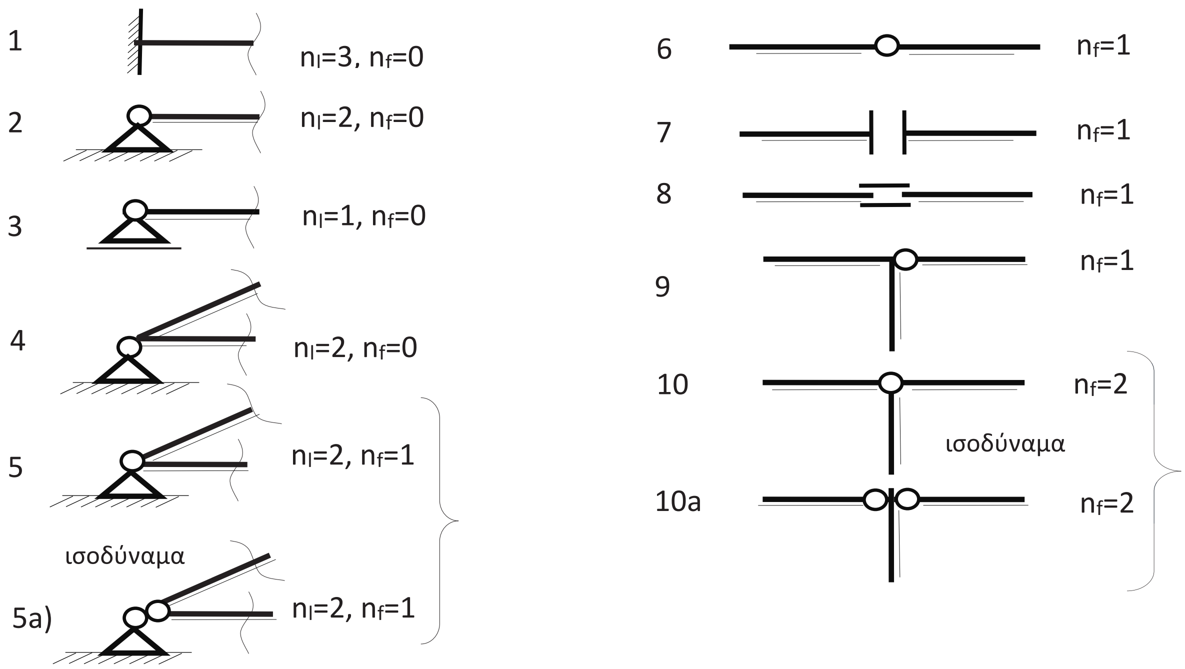
Συμβολίζουμε με n_s το πλήθος των δομικών στοιχείων, με n_l το πλήθος των αντιδράσεων στήριξης, με n_k το πλήθος των κόμβων συμπεριλαμβανομένων των κόμβων στήριξης και με n_f το πλήθος των δευτερευουσών συνθηκών ισορροπίας στις αρθρώσεις μεταξύ των στοιχείων (καμπτική, διατμητική, αξονική).

Η στατική αοριστία για επίπεδους φορείς ορίζεται ως ακολούθως:

$$n=(n_l+3\cdot n_s)-(3\cdot n_k+n_f) \tag{1.2-5}$$

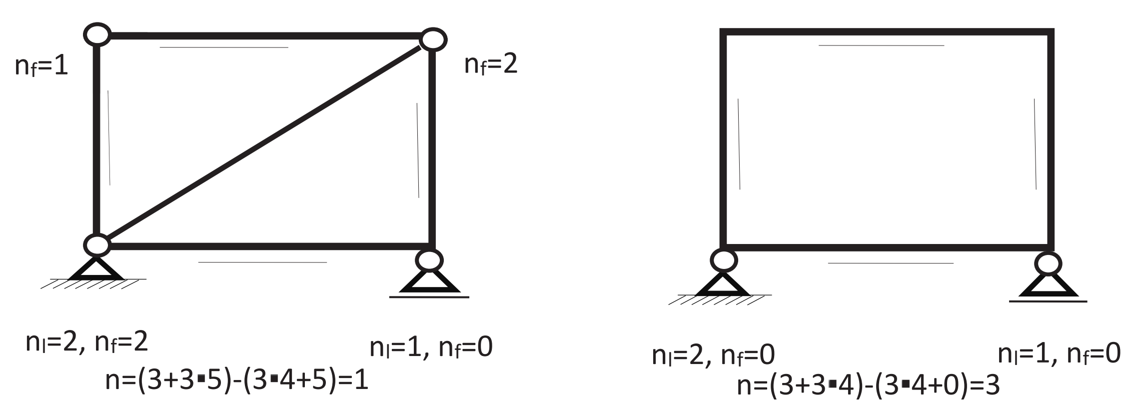
Η στατική αοριστία για φορείς στο χώρο ορίζεται ως ακολούθως:

$$n=(n_l+6\cdot n_s)-(6\cdot n_k+n_f) \tag{1.2-6}$$



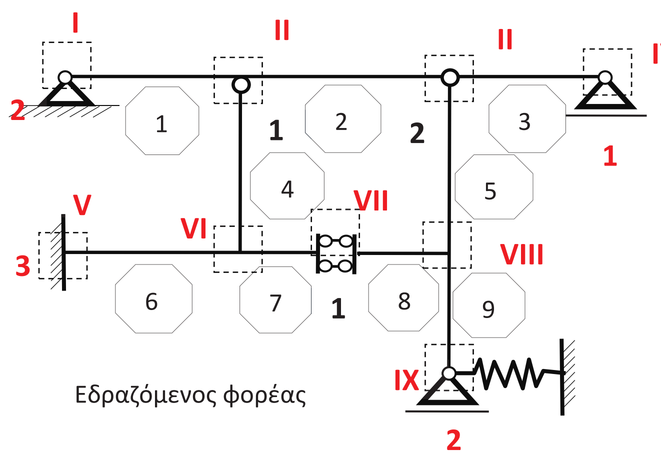
Σχήμα 1.2-4 Πλήθος αντιδράσεων και δευτερευουσών συνθηκών ισορροπίας

Παράδειγμα 2



Σχήμα 1.2-5 Πλήθος αντιδράσεων και δευτερευουσών συνθηκών ισορροπίας

Παράδειγμα 3



Σχήμα 1.2-6 Παράδειγμα για τη μέθοδο της απαρίθμησης

n_s=9, n_l=8, n_k=9, n_f=4 $\quad n=(8+3\cdot 9)-(3\cdot 9+4)=35-31=4$

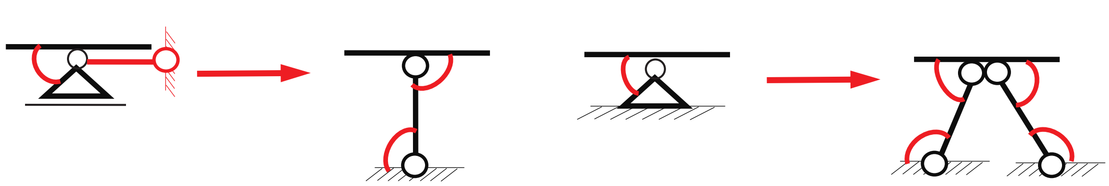
Στο παραπάνω παράδειγμα με λατινικούς αριθμούς συμβολίζονται οι κόμβοι (I-IX). Οι αριθμοί δίπλα στις στηρίξεις (με κόκκινο χρώμα) δηλώνουν το πλήθος των αναπτυσσόμενων αντιδράσεων στήριξης. Οι αριθμοί δίπλα στις εσωτερικές αρθρώσεις (με μπλε χρώμα) δηλώνουν το πλήθος των μεγεθών έντασης που μεταβιβάζονται μέσω αυτών. Οι αριθμοί σε οκταγωνικό πλαίσιο δηλώνουν το πλήθος των δομικών στοιχείων του φορέα.

1.2.3 Η μέθοδος των διαχωριστικών τομών

Διατρέχοντας όλους τους δίσκους-σώματα από τους οποίους συντίθεται ο φορέας, «κλείνουμε» όλους τους υφιστάμενους συνδέσμους-μηχανισμούς, για παράδειγμα, με μετατροπή μιας κύλισης σε σταθερή στήριξη ή με το «κλείσιμο» μιας άρθρωσης (καμπτικής, διατμητικής, αξονικής). Αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη επιπλέον εσωτερικών συνδέσμων ή επιπλέον εξωτερικών συνδέσμων, δηλαδή στηρίξεων. Το πλήθος των δεσμικών ράβδων που χρησιμοποιήσαμε το συμβολίζουμε με t. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε r τομές κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψουν επιμέρους ισοστατικοί υπο-φορείς. Σε κάθε τομή που πραγματοποιούμε απελευθερώνονται (3) άγνωστοι (τρία εντασιακά μεγέθη M,Q,N) στο επίπεδο και (6) στο χώρο. Ο βαθμός στατικής αοριστίας n προκύπτει:

για επίπεδους φορείς $n=3\cdot r-t$ (1.2-7)

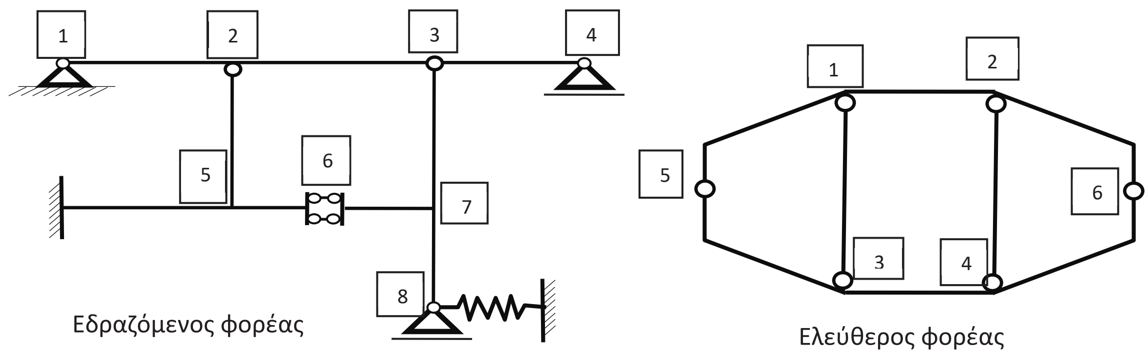
για φορείς στο χώρο $n=6\cdot r-t$ (1.2-8)



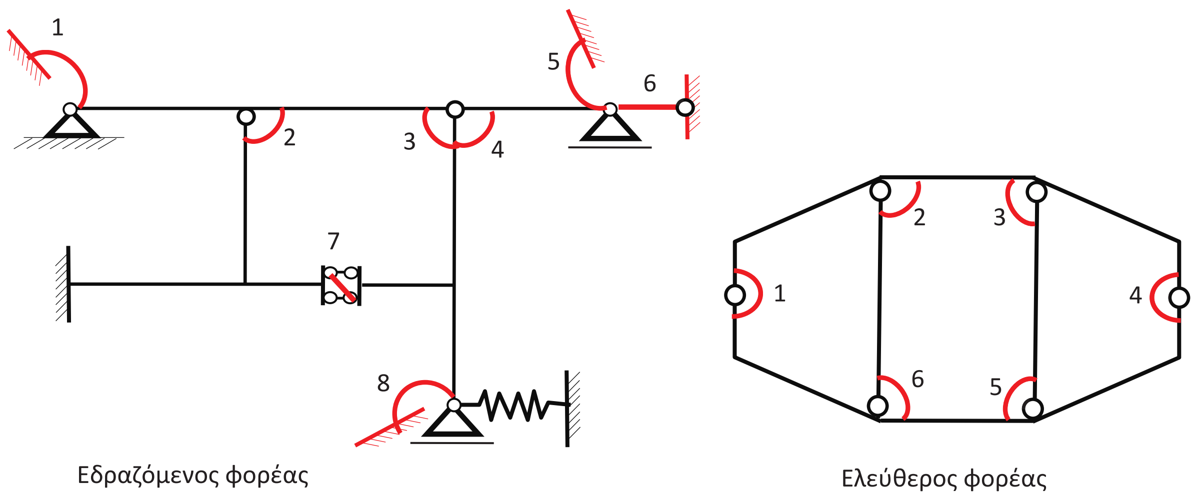
Σχήμα 1.2-7 Ισοδύναμα συστήματα στηρίξεων

Για την κύλιση απαιτούνται δύο δεσμικές ράβδοι προκειμένου να μετατραπεί σε πάκτωση (δύο βαθμοί ελευθερίας). Για την άρθρωση απαιτείται μια δεσμική ράβδος για να μετατραπεί σε πάκτωση (ένας βαθμός ελευθερίας). Εναλλακτικά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την κύλιση με μια δεσμική ράβδο και την άρθρωση με δύο.

Εφαρμογή στα παραδείγματα του Σχήματος 1.2-3:



Σχήμα 1.2-8 Παραδείγματα για τη μέθοδο των διαχωριστικών τομών



Σχήμα 1.2-8 (συνέχ.) Παραδείγματα για τη μέθοδο των διαχωριστικών τομών

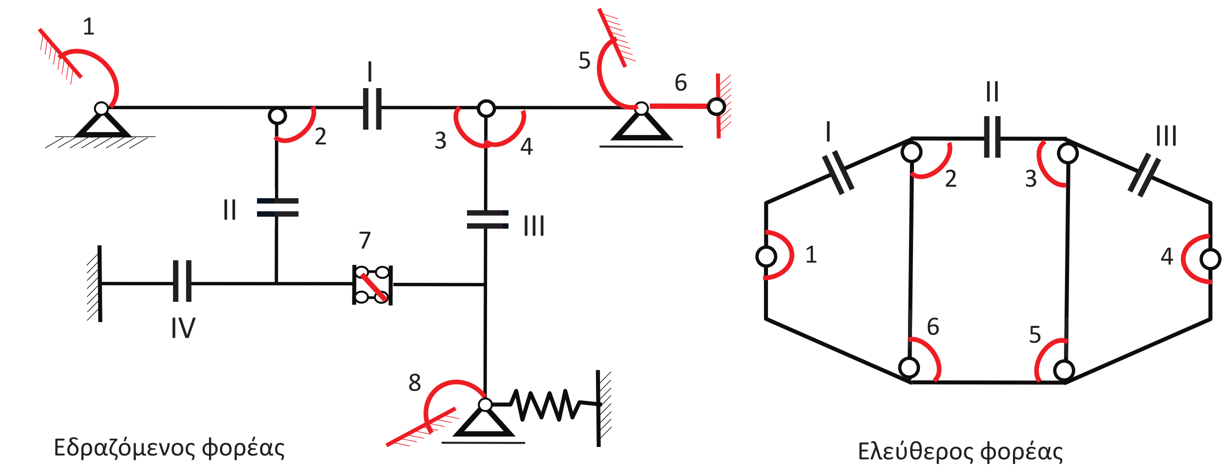
Εδραζόμενος φορέας: Στα σημεία 1,2,7 και 8 απαιτείται μια δεσμική ράβδος προκειμένου να κλείσουν οι αντίστοιχοι σύνδεσμοι-μηχανισμοί. Στα σημεία 3 (ολική άρθρωση) και 4 (κύλιση) απαιτούνται δύο δεσμικές ράβδοι.

Ελεύθερος φορέας: Σε όλα τα σημεία απαιτείται μια δεσμική ράβδος προκειμένου να κλείσουν οι αντίστοιχοι σύνδεσμοι-μηχανισμοί.

Πλήθος των δεσμικών ράβδων που προστέθηκαν στον αρχικό φορέα (με κόκκινο χρώμα):

1. Εδραζόμενος φορέας t=8
2. Ελεύθερος φορέας t=6

Διαδοχικές τομές προκειμένου να δημιουργηθούν επιμέρους ισοστατικοί υπο-φορείς:

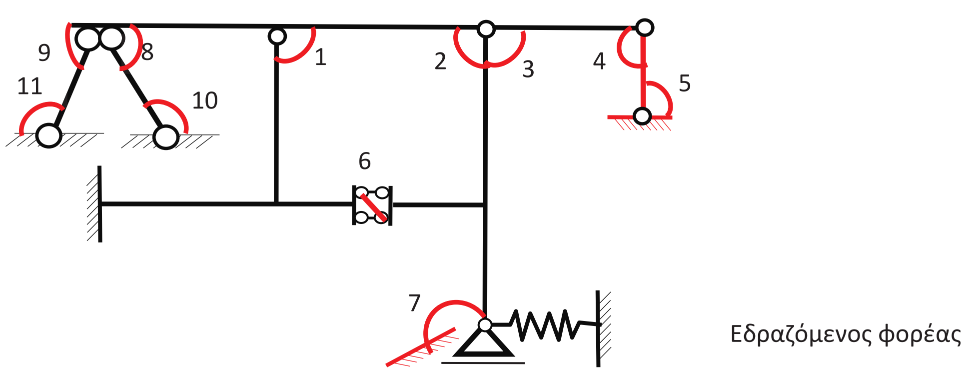


Σχήμα 1.2-8 (συνέχ.) Παραδείγματα για τη μέθοδο των διαχωριστικών τομών

Πλήθος των διαδοχικών τομών:
- Εδραζόμενος φορέας r=IV
- Ελεύθερος φορέας r=III

Στατική αοριστία n:
- Εδραζόμενος φορέας n=3▪4-8=4
- Ελεύθερος φορέας n=3▪3-6=3

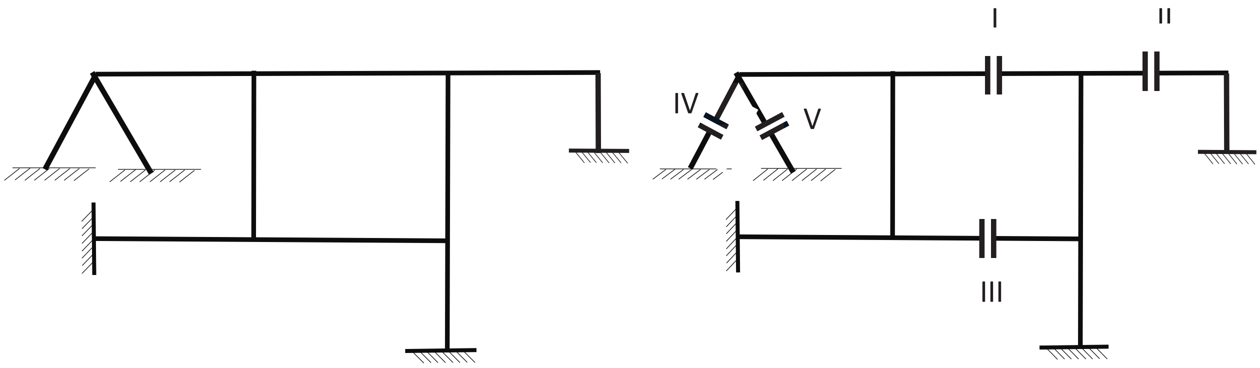
Εναλλακτική αντιμετώπιση των στηρίξεων



Σχήμα 1.2-9 Παράδειγμα για τη μέθοδο των διαχωριστικών τομών (εναλλακτική αντιμετώπιση)

Μηχανισμοί t=11

Με την προσθήκη των t μηχανισμών, ο αρχικός φορέας μετασχηματίζεται στον πλήρως πακτωμένο και παγιωμένο φορέα, του οποίου η υπερστατικότητα προκύπτει απλά με διαδοχικές τομές.



Σχήμα 1.2-9 (συνέχ.) Παράδειγμα για τη μέθοδο των διαχωριστικών τομών

Τομές r=5
Στατική αοριστία n =3▪5-11=4

1.2.4 Η μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών

Η μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών δεν ενδείκνυται για δικτυώματα όπου συνήθως στους κόμβους συντρέχουν περισσότερες από δύο ράβδοι και δυσχεραίνεται η επιλογή των διαδρομών.

Περιδιαβαίνουμε τον στατικό άξονα του φορέα (τον κεντροβαρικό άξονα) ξεκινώντας από ένα σημείο-αφετηρία του φορέα. Στις θέσεις των διακλαδώσεων ακολουθούμε έναν τυχαίο κλάδο και συνεχίζουμε μέχρι να οδηγηθούμε σε ένα ελεύθερο άκρο, μια στήριξη ή συναντήσουμε ένα τμήμα του φορέα από το οποίο έχουμε ήδη περάσει. Στη συνέχεια, η διαδρομή συνεχίζεται από τα σημεία των διασταυρώσεων, ακολουθώντας μια νέα διαδρομή σε κλάδο που δεν έχει «περπατηθεί». Αθροίζονται τα εντασιακά μεγέθη τα οποία είναι μεταβιβάσιμα, στα σημεία που το τέρμα μιας διαδρομής συναντάει μια άλλη υπάρχουσα διαδρομή ή την αφετηρία της ίδιας διαδρομής. Το πλήθος αυτό το συμβολίζουμε με n_a. Ομοίως, κατά την εξέλιξη της διαδρομής σε όλα τα τμήματα του φορέα που συναντώνται μηχανισμοί (καμπτικές, διατμητικές ή αξονικές αρθρώσεις), αθροίζονται οι βαθμοί ελευθερίας. Το πλήθος αυτό το συμβολίζουμε με n_f. Σε εδραζόμενους φορείς απαριθμείται επιπλέον και το πλήθος των δυνατών αντιδράσεων στήριξης n_l. Ο βαθμός στατικής αοριστίας προκύπτει ως ακολούθως.

Για ελεύθερους φορείς:

$$n = n_a - n_f \qquad (1.2\text{-}9)$$

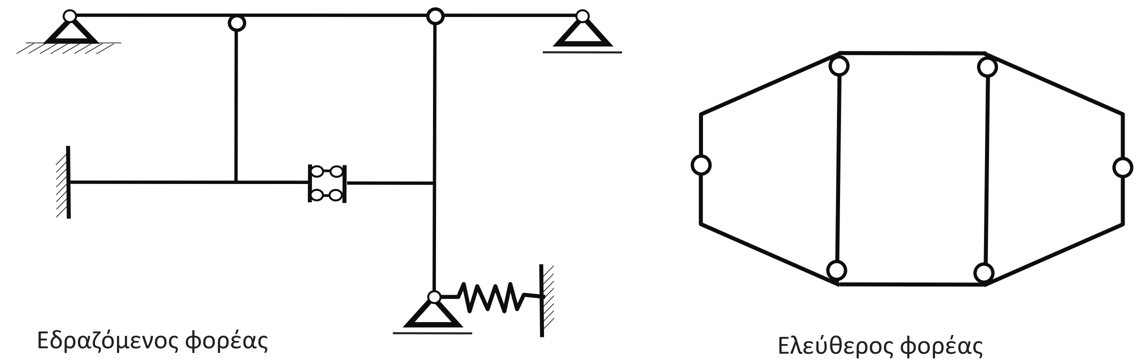
και επειδή για τον υπολογισμό των αντιδράσεων στήριξης στο επίπεδο είναι διαθέσιμες οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας ΣΧ=0, ΣΥ=0, ΣΜ=0 για ολόκληρο τον φορέα, για εδραζόμενους φορείς ως ακολούθως:

$$n = n_a - n_f + (n_l - 3) \qquad (1.2\text{-}10)$$

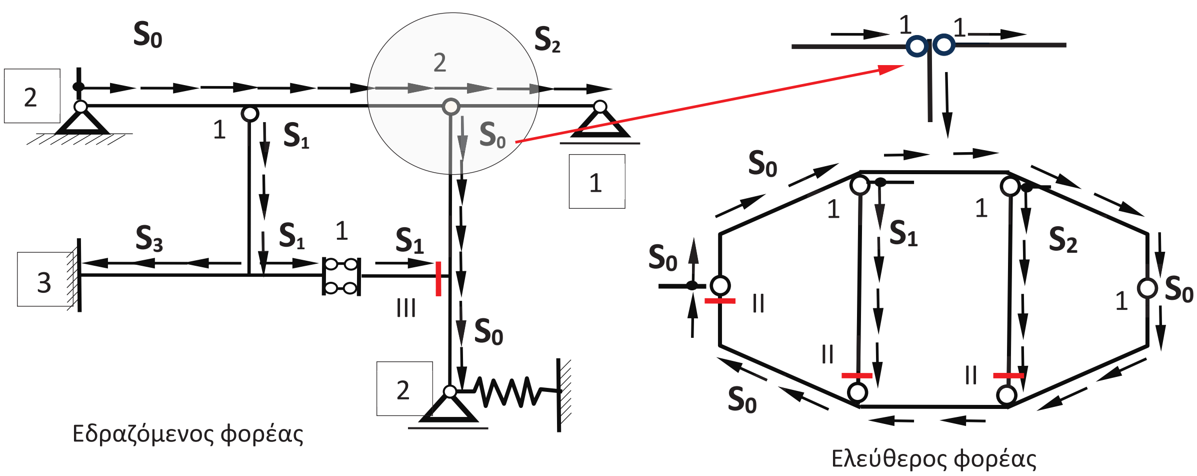
Αντίστοιχα, προκύπτει για εδραζόμενους φορείς στο χώρο:

$$n = n_a - n_f + (n_l - 6) \qquad (1.2\text{-}11)$$

Παράδειγμα 1



Σχήμα 1.2-10 Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών



Σχήμα 1.2-10 (συνέχ.) Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών

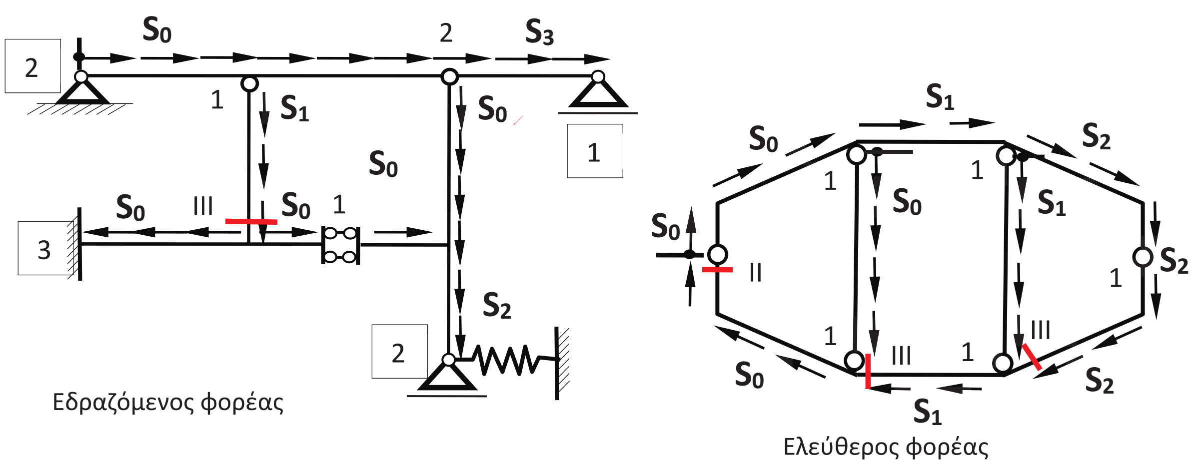
n_a=III, $n_f=4$, $n_l=8$

$n=3-4+(8-3)=4$

$n_a=6$, $n_f=3$

$n=6-3=3$

Άλλος τρόπος αντιμετώπισης (εναλλακτικές διαδρομές)



Σχήμα 1.2-10 (συνέχ.) Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών

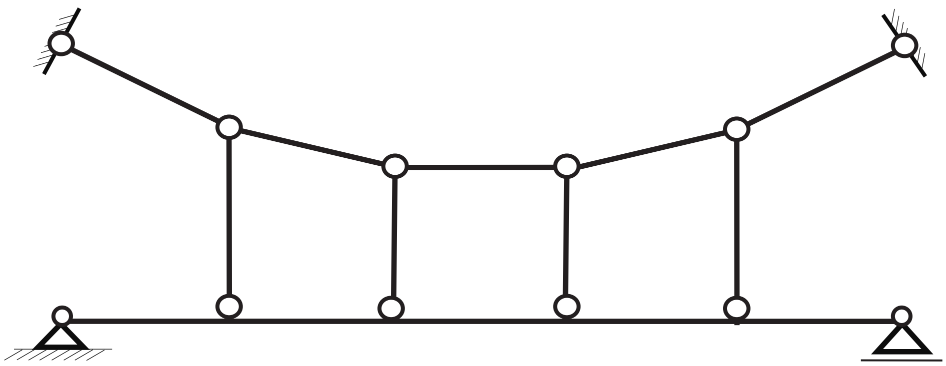
n_a=III, n_f=4, n_l=8

n=3-4+(8-3)=4

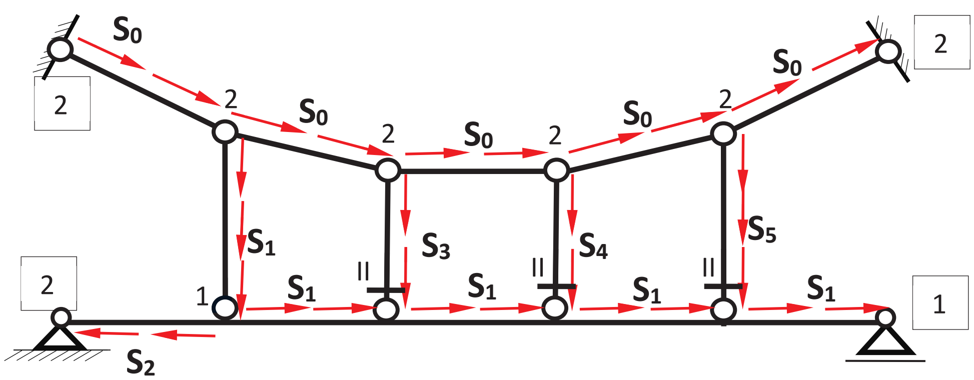
n_a=8, n_f=5

n=8-5=3

Παράδειγμα 2 - Εδραζόμενος Φορέας



Σχήμα 1.2-11 Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών



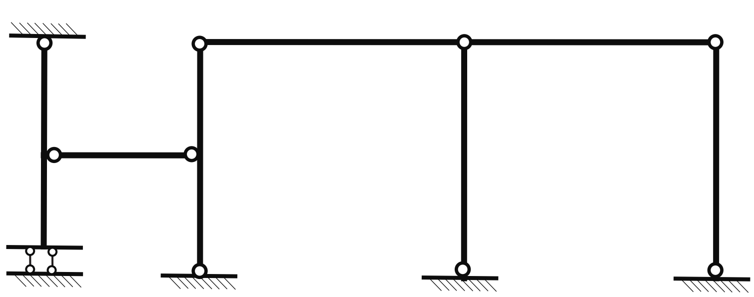
Σχήμα 1.2-11 (συνέχ.) Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών

Στατική αοριστία $n = n_a - n_f + (n_l - 3)$

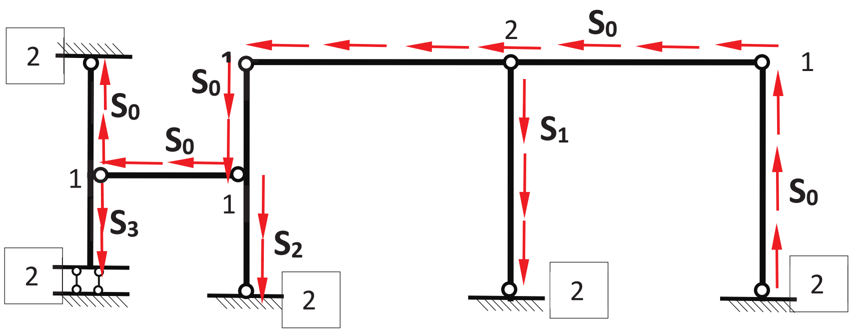
n_a=VI, n_f=9, n_l=7

$$n = 6 - 9 + (7 - 3) = 1$$

Παράδειγμα 3



Σχήμα 1.2-12 Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών

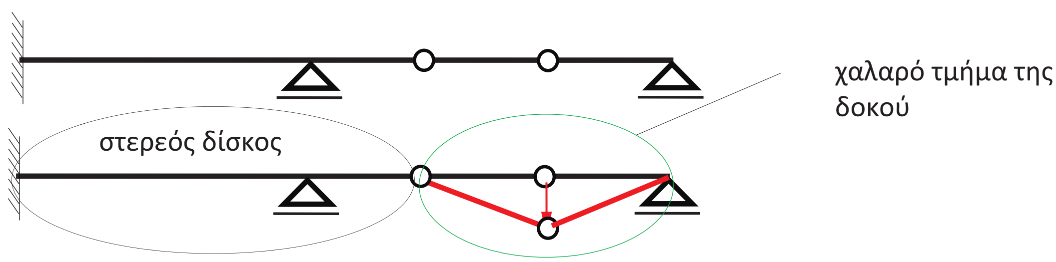


Σχήμα 1.2-12 (συνέχ.) Μέθοδος των επιλεγμένων διαδρομών

$$n_a=0,\ n_f=6,\ n_l=10$$

$$n=0-6+(10-3)=1$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα κριτήρια απαρίθμησης αποτελούν αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη για τη στερεότητα ενός φορέα. Επομένως, εάν επιλέγουμε τις μεθόδους των κριτηρίων απαρίθμησης για τον προσδιορισμό της στατικής αοριστίας, πρέπει ταυτόχρονα να ελέγχουμε εάν ο εξεταζόμενος φορέας είναι χαλαρός. Τέτοιο ζήτημα δεν τίθεται εάν ακολουθήσουμε τις μεθόδους δόμησης-αποδόμησης. Δηλαδή, φορείς με n=0 (ισοστατικοί) σύμφωνα με τα κριτήρια απαρίθμησης, μπορεί να είναι χαλαροί όπως το παράδειγμα του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 1.2-13 Φορέας τμηματικά χαλαρός

$$n=(n_l+3\cdot n_s)-(3\cdot n_k+n_f)=(5+3\cdot 4)-(3\cdot 5+2)=17-17=0$$

1.2.5 Απλοποιημένες μέθοδοι για ειδικούς φορείς

1) Δικτυώματα

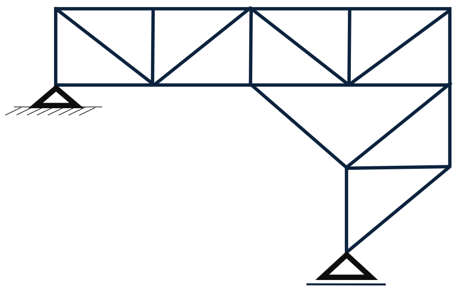
Δικτυώματα που μορφώνονται κατά τον 1^o, 2^o ή 3^o κανόνα μόρφωσης και συνδέονται με το έδαφος μέσω μιας σταθερής και μιας κινητής στήριξης (κύλισης) ή μέσω τριών ράβδων των οποίων οι διευθύνσεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι ισοστατικοί φορείς (n=0).

Το πλήθος των επιπλέον ράβδων που υπάρχουν στον φορέα, όμως για την μόρφωση του ισοστατικού δικτυώματος δεν είναι απαραίτητες, αποτελεί και τον βαθμό στατικής αοριστίας (n). Αντίθετα, εάν για τη δόμηση ενός ισοστατικού δικτυώματος απαιτούνται επιπλέον ράβδοι, τότε ο φορέας είναι στατικά υπο-ορισμένος χαλαρός. Το πλήθος των ράβδων που απαιτούνται καθορίζει και τον βαθμό χαλαρότητας (κινητότητας).

Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί σε πολλές περιπτώσεις πιο γρήγορα και με ασφάλεια στον στόχο, στον προσδιορισμό της στατικής αοριστίας ή της στερεότητας ενός φορέα, απ' ό,τι οι ανταγωνιστικές μέθοδοι της απαρίθμησης.

1ος Νόμος μόρφωσης

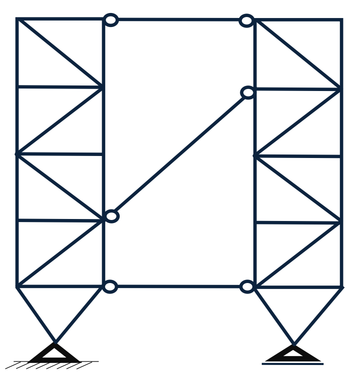
Ξεκινώντας από ένα στερεό σώμα π.χ. από μία ράβδο, με την προσθήκη δύο ακόμη ράβδων προκύπτει ένας νέος κόμβος έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα τρίγωνο. Η διαδικασία συνεχίζεται επαναλαμβανόμενη, με την προϋπόθεση οι δύο νέες ράβδοι να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Σχήμα 1.2-14 1ος Νόμος μόρφωσης φορέων

2ος Νόμος μόρφωσης

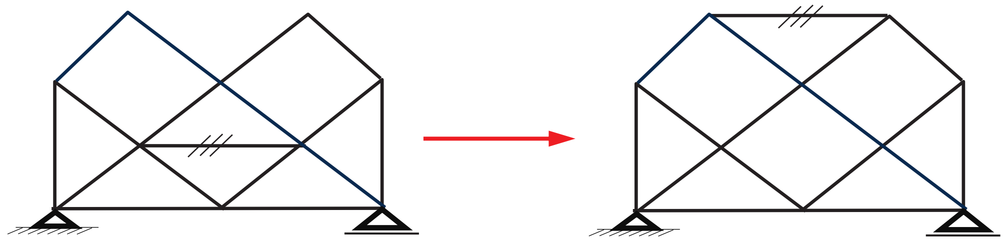
Δύο εσωτερικά ισοστατικά δικτυώματα συνδέονται μεταξύ τους με τρεις ράβδους οι οποίες δεν τέμνονται σε ένα σημείο και δεν είναι παράλληλες. Εάν οι δύο δικτυωτοί δίσκοι έχουν ένα κοινό σημείο, αρκεί η προσθήκη μιας ράβδου αφού ο κοινός κόμβος ισοδυναμεί με δύο ράβδους.



Σχήμα 1.2-15 2ος Νόμος μόρφωσης φορέων

3ος Νόμος μόρφωσης

Σε ένα εσωτερικά ισοστατικό δικτύωμα αφαιρείται μία ράβδος ή και περισσότερες και τοποθετείται σε άλλη θέση του φορέα, είτε ως εσωτερική ράβδος μεταξύ δυο κόμβων είτε ως ράβδος στήριξης ενός κόμβου, με τέτοιο τρόπο ώστε ο φορέας να εξακολουθεί να είναι στερεός.

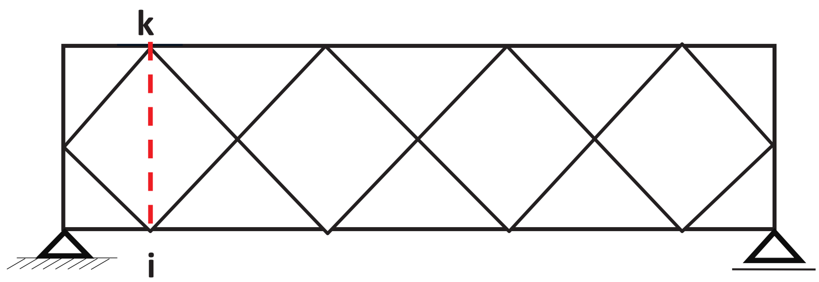


Σχήμα 1.2-16 3^{ος} Νόμος μόρφωσης φορέων

Δικτυώματα εσωτερικά ισοστατικά

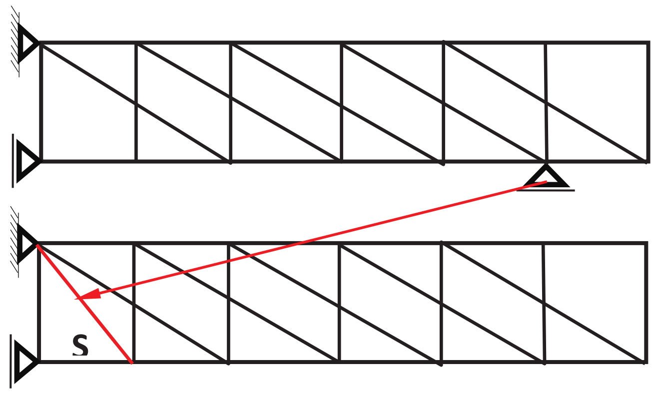
Ένα εξωτερικά ισοστατικά (στερεοστατικά) εδραζόμενο δικτύωμα είναι επίσης εσωτερικά ισοστατικό εάν το πλήθος των ράβδων του είναι κατά (3) μικρότερο από το διπλάσιο του πλήθους των κόμβων.

Παράδειγμα



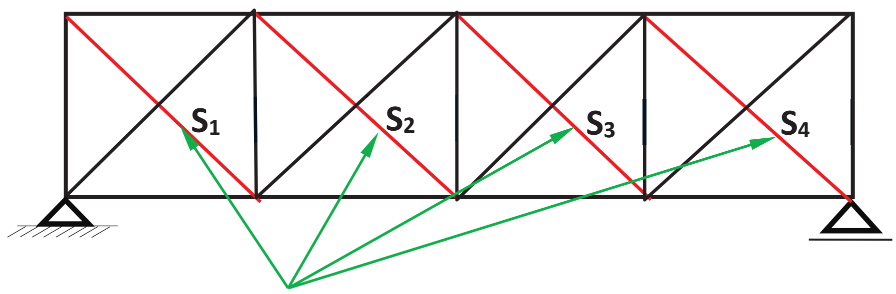
Σχήμα 1.2-17 Δικτυωτός φορέας εξωτερικά και εσωτερικά ισοστατικός

Στο δικτύωμα του Σχήματος 1.2-17 εάν προστεθεί η ράβδος (ik) προκύπτει ένας ισοστατικός φορέας διότι είναι μορφωμένος σύμφωνα με τον 1ο νόμο μόρφωσης. Επομένως, χωρίς τη ράβδο (ik) ο φορέας είναι στατικά υπο-ορισμένος-χαλαρός (n= -1).



Σχήμα 1.2-18 Δικτυωτοί φορείς σύμφωνα με τον 3^{ο} νόμο μόρφωσης

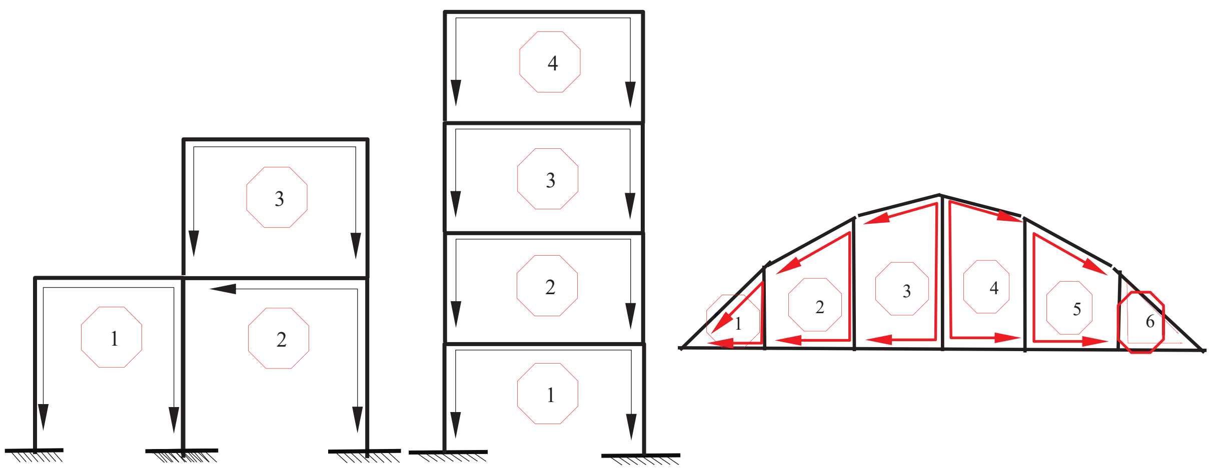
Τα δικτυώματα του σχήματος 1.2-18 μορφώνονται σύμφωνα με τον 3^{ο} νόμο μόρφωσης και επομένως είναι ισοστατικά (n=0). Το 2^{ο} προκύπτει από το 1^{ο} με αντικατάσταση της κύλισης με τη ράβδο S_1 (εναλλαγή ράβδων).



Σχήμα 1.2-19 Στατική αοριστία δικτυωτού φορέα

Στο Σχήμα 1.2-19 οι ράβδοι S1, S2, S3 και S4 πλεονάζουν για τον σχηματισμό του δικτυώματος κατά τον 1^{o} νόμο μόρφωσης. Επομένως, ο συνολικός φορέας είναι n=4 στατικά αόριστος, όσο και το πλήθος των πλεοναζουσών ράβδων.

1) Πλαισιακοί φορείς αποτελούμενοι από κλειστές κυψέλες



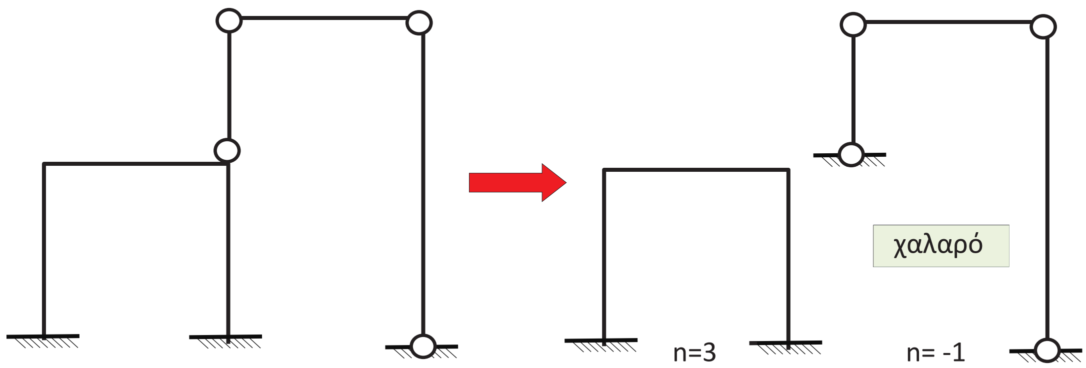
Σχήμα 1.2-20 Πλαισιακοί φορείς αποτελούμενοι από κλειστές κυψέλες

n=3▪3=9 n=4▪3=12 n=6▪3=18

Σε πλαίσια με στιβαρές συνδέσεις που αποτελούνται από κλειστές κυψέλες, κάθε κυψέλη προσθέτει (3) άγνωστα εσωτερικά μεγέθη έντασης. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και κυψέλες που κλείνουν με τον εδαφόδισκο.

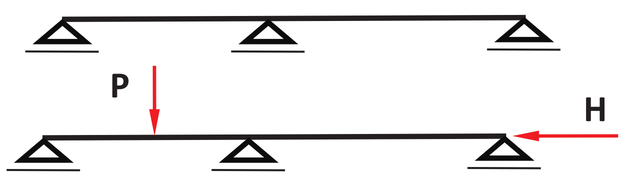
Σημαντικές παρατηρήσεις

Υπάρχουν φορείς που, ανάλογα με τη φόρτιση, άλλοτε λειτουργούν ως υπερστατικοί και άλλοτε ως μηχανισμοί (κινηματικές αλυσίδες). Επομένως, για γενική φόρτιση οι συγκεκριμένοι φορείς είναι ακατάλληλοι αφού υπάρχουν φορτίσεις που δεν μπορούν να αναληφθούν.



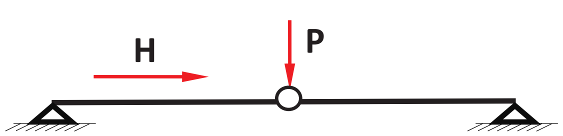
Σχήμα 1.2-21: Φορέας με υπο-φορέα χαλαρό

Σύμφωνα με τα κριτήρια απαρίθμησης των προηγούμενων παραγράφων, ο παραπάνω φορέας είναι n=2 φορές στατικά αόριστος. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό εκ του γεγονότος ότι ο φορέας αποτελείται από έναν υπο-φορέα με στατική αοριστία n=3 και έναν στατικά υπο-ορισμένο n=-1.



Σχήμα 1.2-22: Φορέας χαλαρός

Σύμφωνα με τα κριτήρια απαρίθμησης, ο φορέας του Σχήματος 1.2-22 είναι ισοστατικός (n=0). Ο φορέας δεν μπορεί να παραλάβει την οριζόντια φόρτιση H λόγω των τριών κυλίσεων, δηλαδή για οριζόντια φόρτιση είναι στατικά υπο-ορισμένος (n= -1) ενώ για κατακόρυφη φόρτιση P είναι μια φορά υπερστατικός (n=1).



Σχήμα 1.2-23 Φορέας χαλαρός

Σύμφωνα με τα κριτήρια απαρίθμησης, ο φορέας του Σχήματος 1.2-23 είναι ισοστατικός (n=0). Η καμπτική άρθρωση μπορεί να μετακινηθεί κάθετα στον κεντροβαρικό άξονα της δοκού χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις στη δοκό. Επομένως, για τη φόρτιση P κάθετα στον άξονα ο φορέας είναι κινητός (n= -1), ενώ για την οριζόντια φόρτιση H είναι μια φορά στατικά αόριστος (n=1).

1.3 Συστηματική παρουσίαση της Μεθόδου των Δυνάμεων

1.3.1 Εισαγωγή του Κύριου Ισοστατικού Συστήματος (ΚΙΣ)

Όπως αναφέρθηκε, με αφετηρία τον σωστό προσδιορισμό της στατικής αοριστίας ενός γραμμικού φορέα, επιλέγεται το Κύριο Ισοστατικό Σύστημα, με την κατάλυση τόσων δεσμικών ράβδων όσος είναι και ο βαθμός στατικής αοριστίας. Προκειμένου τα δύο συστήματα (αρχικό και υποκατάστατο ΚΙΣ) να είναι ισοδύναμα, οι καταργηθείσες δεσμικές ράβδοι αντικαθίστανται με άγνωστες δυνάμεις οι οποίες ονομάζονται **Υπεράριθμες Δυνάμεις** X_1, X_2, …, X_n. Με τον όρο **«Δυνάμεις»** εννοούνται εσωτερικά μεγέθη έντασης (αξονικές δυνάμεις, τέμνουσες δυνάμεις, ροπές, τάσεις ράβδων σε δικτύωμα ή σε μικτό φορέα) καθώς και αντιδράσεις στηρίξεων. Οι Υπεράριθμες Δυνάμεις προσδιορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε δρώντας ταυτόχρονα με τις εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις ή τους επιβαλλόμενους καταναγκασμούς (εσωτερικούς και εξωτερικούς) να προκαλούν συνολικά τέτοια παραμορφωσιακή κατάσταση (ελαστική γραμμή) η οποία να ικανοποιεί τις **συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων** του αρχικού υπερστατικού φορέα, στις θέσεις των καταργηθεισών δεσμικών ράβδων.

Οι συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων αναφέρονται στα παραμορφωσιακά μεγέθη ενός δομικού φορέα που ως τέτοια νοούνται οι μετακινήσεις χαρακτηριστικών σημείων του φορέα (στηρίξεις, πακτώσεις), οι μετακινήσεις των διαφόρων σημείων του φορέα ως εξωτερικά μεγέθη καθώς και οι παραμορφώσεις των δομικών στοιχείων του ως εσωτερικά μεγέθη παραμόρφωσης. Επομένως, το ζήτημα της επίλυσης ενός υπερστατικού φορέα ανάγεται σε πρόβλημα προσδιορισμού των υπεραρίθμων μεγεθών X_1, X_2, …, X_n. Σύμφωνα με την αρχή της αποδέσμευσης, η λειτουργία και η ένταση του αρχικού υπερστατικού φορέα είναι ισοδύναμη με αυτήν του αντίστοιχου Κύριου Ισοστατικού Συστήματος (ΚΙΣ) επί του οποίου ενεργούν ταυτόχρονα, τόσο τα αρχικά αίτια «φορτία» όσο και οι Υπεράριθμες Δυνάμεις X_j στις θέσεις των καταλυθέντων συνδέσμων. Οι σύνδεσμοι όμως (οι δεσμικές ράβδοι που καταλύονται) εκτός του ότι μεταβιβάζουν εντασιακά μεγέθη, ταυτόχρονα απαγορεύουν τις εργικά αντίστοιχες μετακινήσεις. Για εσωτερικά εντασιακά μεγέθη (M, Q, N) τα οποία εμφανίζονται πάντοτε ως ζεύγη, οι εργικά ανταποκρινόμενες παραμορφώσεις είναι διαφορές μετακινήσεων όπως παρουσιάζονται αναλυτικά στους πίνακες που ακολουθούν.

Επεξηγήσεις πινάκων

Κατάλυση εσωτερικών συνδέσμων

Η κατάλυση της δεσμικής ράβδου (εσωτερικό μέγεθος) που μεταβιβάζει την αξονική δύναμη Ni=Xn στο σημείο i του φορέα επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μίας αξονικής άρθρωσης στο σημείο i. Αυτός ο μηχανισμός δίνει τη δυνατότητα να εμφανιστεί ο ρήκτης μήκυνσης (χάσμα) $\Delta u=u_2-u_1$ στην ελαστική γραμμή.

Η κατάλυση της δεσμικής ράβδου (εσωτερικό μέγεθος) που μεταβιβάζει την τέμνουσα δύναμη Qi=Xn στο σημείο i του φορέα επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μίας διατμητικής άρθρωσης στο σημείο i. Αυτός ο μηχανισμός δίνει τη δυνατότητα να εμφανιστεί ο ρήκτης ολίσθησης (άλμα) $\Delta w=w_2-w_1$ στην ελαστική γραμμή.

Η κατάλυση της δεσμικής ράβδου (εσωτερικό μέγεθος) που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης Mi=Xn στο σημείο i του φορέα επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μίας καμπτικής άρθρωσης στο σημείο i. Αυτός ο μηχανισμός δίνει τη δυνατότητα να εμφανιστεί ο ρήκτης καμπύλωσης (γόνατο)

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ στην ελαστική γραμμή.

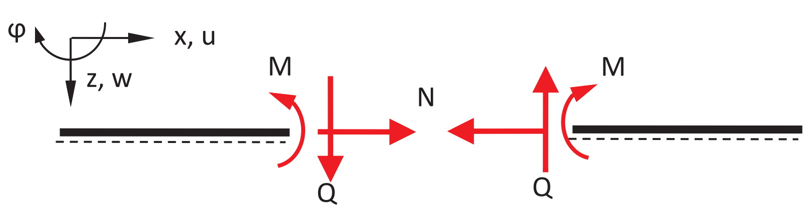
Κατάλυση εξωτερικών συνδέσμων

Στην περίπτωση κατάλυσης εξωτερικών συνδέσμων, δηλαδή στηρίξεων και πακτώσεων, το ένα από τα δύο σκέλη του υπεράριθμου μεγέθους που εισάγεται δρα στο έδαφος. Σ' αυτήν την περίπτωση, η αναπτυσσόμενη παραμόρφωση από το υπεράριθμο μέγεθος είναι απόλυτη και όχι διαφορά παραμορφώσεων. Η συνιστώσα του υπεράριθμου μεγέθους που δρα στο έδαφος δεν παράγει έργο. Στην περίπτωση της κατακόρυφης κύλισης, η μετακίνηση που προκαλεί η διπλή δύναμη Ax είναι ΔW=-w, στην περίπτωση της οριζόντιας κύλισης η μετακίνηση που προκαλεί η διπλή δύναμη Az είναι Δu=u και, τέλος, στην περίπτωση της πάκτωσης η στροφή που προκαλεί η διπλή ροπή M είναι Δφ=φ. Παρόμοια είναι και η αντιμετώπιση των ελαστικών συνδέσμων και ελαστικών στηρίξεων-πακτώσεων.

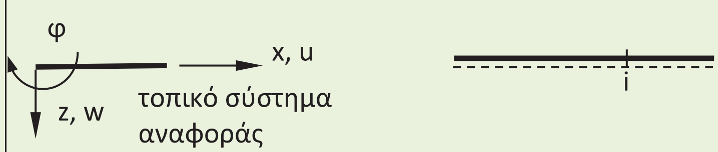
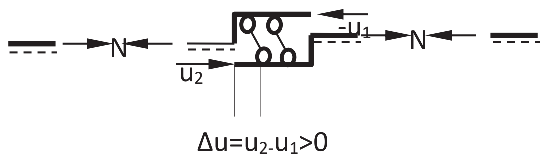
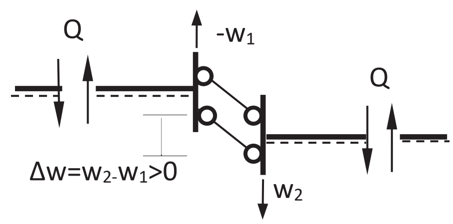
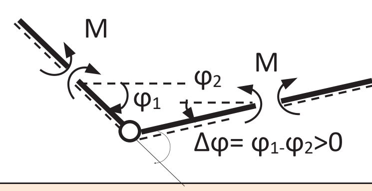
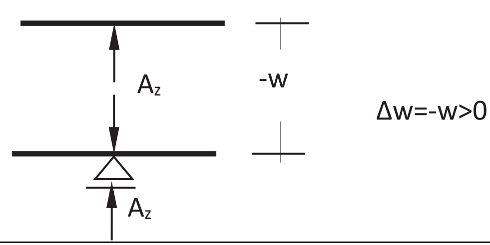
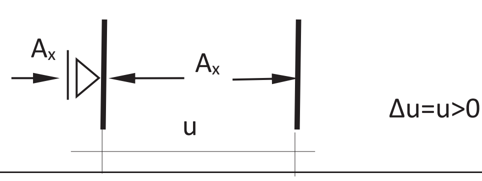
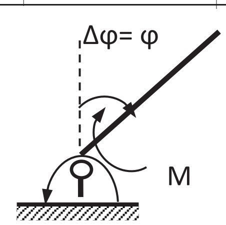
Οι διαφορές συναρμογής στην περίπτωση των εσωτερικών συνδέσμων (φορτίων διατομής) αναφέρονται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (x,z,φ) του εξεταζόμενου στοιχείου. Στην περίπτωση των ελαστικών συνδέσμων είναι σκόπιμο οι διαφορές συναρμογής να αναφέρονται στο γενικό σύστημα συντεταγμένων (X,Vx/Z,Vz/ φ).

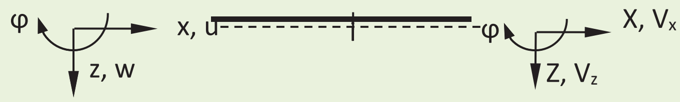
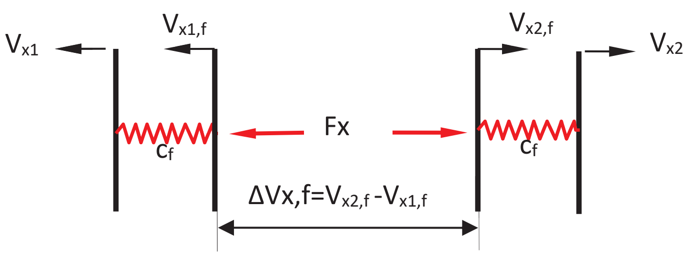
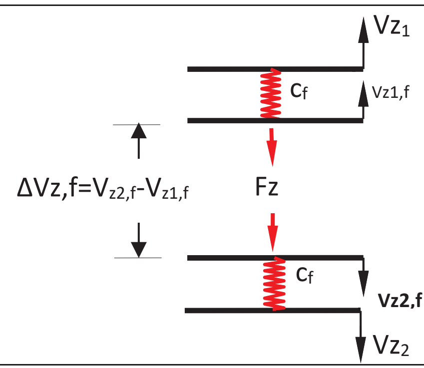
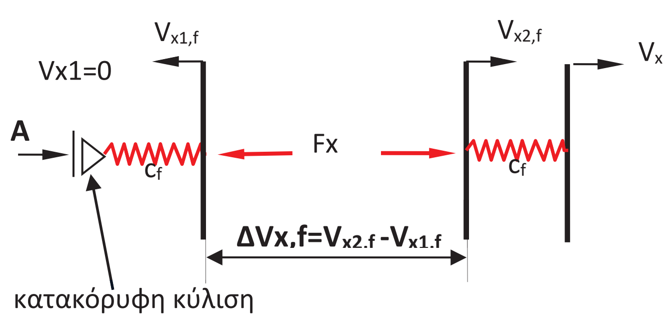
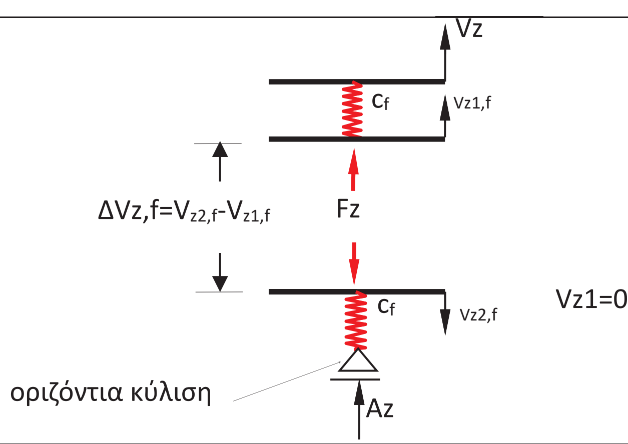
Επισημαίνεται ότι στις περιπτώσεις των ελαστικών δεσμικών ράβδων και των ελαστικών στηρίξεων-πακτώσεων οι παραμορφώσεις αποτελούνται από δύο μέρη, το μέρος του συστήματος και το μέρος του ελατηρίου. Αντιθέτως, στις ακλόνητες στηρίξεις υφίσταται μόνο το μέρος της παραμόρφωσης του συστήματος.

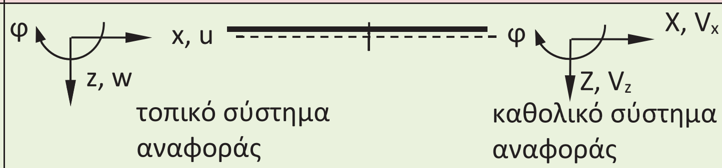
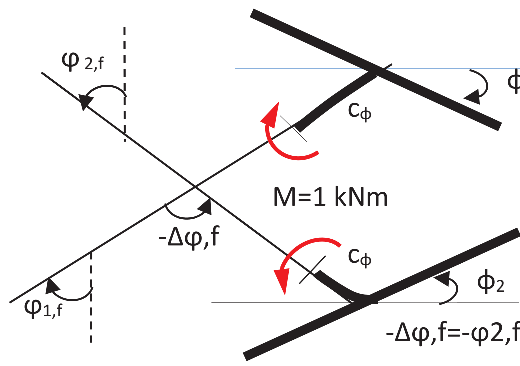
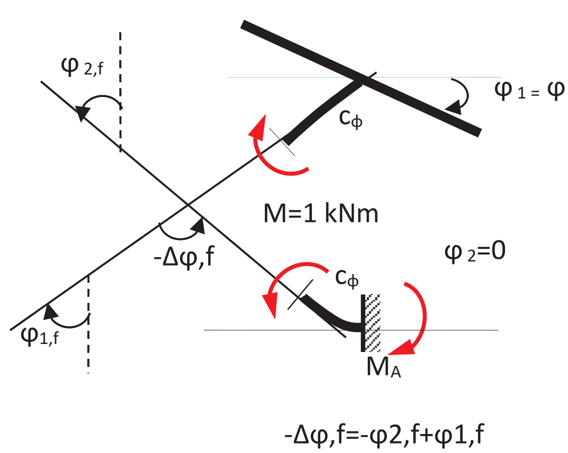
Τα υπεράριθμα μεγέθη εισάγονται ως ζεύγη στις δύο όχθες του συνδέσμου που καταλύεται. Σε ό,τι αφορά τη συμβατική θετική φορά των υπεραρίθμων μεγεθών X_i, υπάρχει απόλυτη ελευθερία επιλογής στον μελετητή-χρήστη. Ενδείκνυται όμως να συμφωνεί με τις θετικές φορές των εσωτερικών μεγεθών έντασης, των ονομαζόμενων και φορτίων διατομής. Η πραγματική φορά τους θα προκύψει με την ολοκλήρωση της υπερστατικής επίλυσης, από το πρόσημο που θα έχει η αριθμητική τιμή τους. Αν το πρόσημο προκύψει θετικό, η πραγματική φορά του συγκεκριμένου υπεράριθμου μεγέθους ταυτίζεται με αυτήν που έχει εξαρχής υιοθετηθεί. Αν προκύψει αρνητικό, η πραγματική φορά είναι αντίθετη από την ορισθείσα. Το ίδιο ισχύει και για τις εργικά στα υπεράριθμα μεγέθη ανταποκρινόμενες παραμορφώσεις.



Σχήμα 1.3-1 Φορτία διατομής και θετική προσήμανση

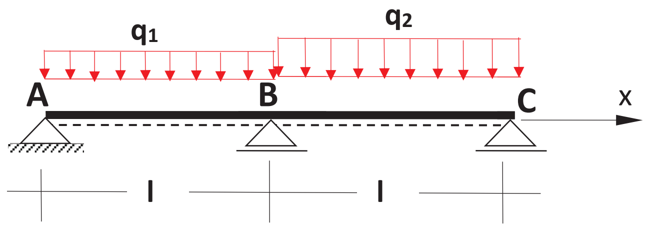
Τύπος συνδέσμου	Κατάλυση εσωτερικού συνδέσμου στο (i) με την εισαγωγή άρθρωσης, εισαγωγή του υπεράριθμου μεγέθους X_n και η αντίστοιχη θετική διαφορά μετακινήσεων (εργικά ανταποκρινόμενη στο X_n) .	Συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων
Καταλυόμενος εσωτερικός σύνδεσμος		
Αξονική άρθρωση		Άγνωστη η αξονική δύναμη N, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta u=0$
Διατμητική άρθρωση		Άγνωστη η τέμνουσα δύναμη Q, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta w=0$
Καμπτική άρθρωση		Άγνωστη η καμπτική ροπή M, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta\varphi=0$
Καταλυόμενος εξωτερικός σύνδεσμος	Κατάλυση εξωτερικού συνδέσμου στο (i) που είναι ακλόνητο σημείο στήριξης. Εισαγωγή του υπεράριθμου μεγέθους X_n και θετική διαφορά μετακινήσεων (εργικά ανταποκρινόμενη στο X_n) .	Συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων
Κατακόρυφη κύλιση		Άγνωστη η αντίδραση A_z , προκύπτει από τη σχέση: $\Delta w=0$
Οριζόντια κύλιση		Άγνωστη η αντίδραση A_x, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta u=0$
Ροπή στην πάκτωση		Άγνωστη η ροπή M στην πάκτωση, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta\varphi= 0$

Τύπος συνδέσμου	Κατάλυση εσωτερικού συνδέσμου στο (i) με την εισαγωγή άρθρωσης, εισαγωγή του υπεράριθμου μεγέθους X_n και η αντίστοιχη θετική διαφορά μετακινήσεων (εργικά ανταποκρινόμενη στο X_n) .	Συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων
Καταλυόμενος εσωτερικός σύνδεσμος	 τοπικό σύστημα αναφοράς καθολικό σύστημα αναφοράς	
Οριζόντιο δρομικό ελατήριο σε τυχαία θέση του φορέα		Άγνωστη η δύναμη Fx στο δρομικό ελατήριο, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta V_{x,f}=0$ $F_x=(V_{x2}-V_{x1})\cdot c_f$ c_f : οριζόντια ελατηριακή σταθερά
Κατακόρυφο δρομικό ελατήριο σε τυχαία θέση του φορέα		Άγνωστη η δύναμη στο δρομικό ελατήριο, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta V_{z,f}=0$ $F_z=(V_{z2}-V_{z1})\cdot c_f$ c_f : κατακόρυφη ελατηριακή σταθερά
Οριζόντιο δρομικό ελατήριο σε κατακόρυφη κύλιση (ελαστική στήριξη)		Άγνωστη η δύναμη Fx στο δρομικό ελατήριο, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta V_{x,f}=0$ $F_x=V_x\cdot c_f$ $A_x=F_x$ c_f : οριζ. ελατηριακή σταθερά
Κατακόρυφο δρομικό ελατήριο σε οριζόντια κύλιση (ελαστική στήριξη)		Άγνωστη η δύναμη στο δρομικό ελατήριο, προκύπτει από τη σχέση: $\Delta V_{z,f}=0$ $F_z=V_z\cdot c_f$ $A_z=F_z$ c_f : κατακόρυφη ελατηριακή σταθερά

Τύπος συνδέσμου	Κατάλυση εσωτερικού συνδέσμου στο (i) με την εισαγωγή άρθρωσης, εισαγωγή του υπεράριθμου μεγέθους X_n =M και η αντίστοιχη θετική διαφορά στροφών (εργικά ανταποκρινόμενη στο X_n) .	Συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων
Καταλυόμενος εσωτερικός σύνδεσμος		
Στροφικό ελατήριο σε τυχαία θέση του φορέα		Άγνωστη η ροπή M στο στροφικό ελατήριο, προκύπτει από τη σχέση: -$\Delta\varphi_{,f}$=0 $M=(-\varphi_2+\varphi_1)\cdot c_\varphi$ c_φ: στροφική ελατηριακή σταθερά
Στροφικό ελατήριο σε πάκτωση (ελαστική πάκτωση)		Άγνωστη η ροπή στο στροφικό ελατήριο, προκύπτει από τη σχέση: -$\Delta\varphi_{,f}$=0 $M=\varphi\cdot c_\varphi$ $M_A=M$ c_φ: στροφική ελατηριακή σταθερά

Η Μέθοδος των Δυνάμεων σε απλά παραδείγματα

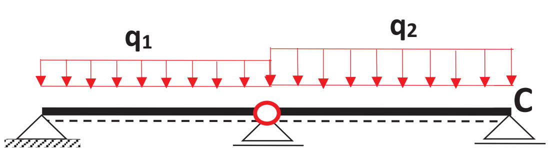
Ο φορέας του Σχήματος 1.3-2 που παριστάνει μια συνεχή δοκό δύο ανοιγμάτων είναι n=1 φορά στατικά αόριστος. Υποθέτουμε σταθερή ροπή αδράνειας στη δοκό EI(x)=EI=σταθ.



Σχήμα 1.3-2 Υπερστατικός φορέας-συνεχής δοκός δύο ανοιγμάτων

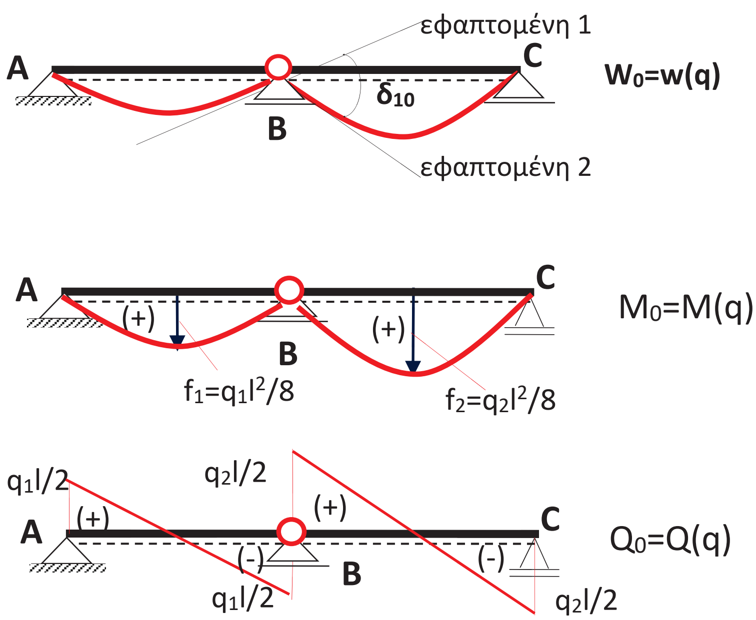
Η παρεμβολή μιας άρθρωσης πάνω από τη μεσαία στήριξη B μετατρέπει τον αρχικό φορέα σε ισοστατικό. Έτσι προκύπτει το Κύριο Ισοστατικό Σύστημα (ΚΙΣ). Δεδομένου ότι μπορούν να προκύψουν άπειρα σε αριθμό κύρια ισοστατικά συστήματα, απαιτείται σχετική σκέψη προκειμένου η επιλογή να οδηγεί σε ένα κατάλληλο ΚΙΣ, δηλαδή να μην είναι χαλαρό σύστημα (μηχανισμός), να επιλύεται εύκολα, και επιπλέον η λειτουργία του να μην απέχει πολύ από την αντίστοιχη του αρχικού (υπερστατικού) φορέα ώστε να αποφευχθούν αριθμητικές αστάθειες.

Επιλύοντας το ΚΙΣ λόγω της εξωτερικά επιβαλλόμενης φόρτισης q προκύπτει το διάγραμμα ροπών M(q) και αντίστοιχα το διάγραμμα τεμνουσών Q(q). Για τις ανάγκες της Μεθόδου των Δυνάμεων η εντασιακή κατάσταση στο Κύριο Ισοστατικό Σύστημα θα συμβολίζεται ως κατάσταση ‘’0’’ και τα αντίστοιχα διαγράμματα από εξωτερική φόρτιση M_0, Q_0, N_0. Διαπιστώνουμε ότι η ελαστική γραμμή w_0 στο ΚΙΣ από εξωτερική φόρτιση εμφανίζει γόνατο στη μεσαία στήριξη B (Σχήμα 1.3-4). Οι δύο εφαπτομένες στο B στις αντίστοιχες καμπύλες της ελαστικής γραμμής αριστερά και δεξιά της στήριξης σχηματίζουν γωνία $\Delta\phi_{B,0}=\delta_{10}$ [Ο πρώτος δείκτης (1) παραπέμπει στη θέση (1) όπου έχει καταλυθεί η δεσμική ράβδος και όπου ασκείται το υπεράριθμο μέγεθος X_1, ο δεύτερος δείκτης (0) παραπέμπει στο αίτιο, στην προκείμενη περίπτωση στα φορτία q που φορτίζουν το ΚΙΣ]. Η γωνία $\Delta\phi_{B,0}$ που για τις ανάγκες της Μεθόδου Δυνάμεων συμβολίζεται με δ_{10} υπολογίζεται κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια της Αρχής των Δυνατών Έργων (ΑΔΕ). Τοποθετώντας μια διπλή μοναδιαία ροπή στο ΚΙΣ πάνω από τη στήριξη B ως εργικά αντίστοιχο μέγεθος στη διαφορά στροφών $\Delta\phi_{B,0}$, προκύπτει το μοναδιαίο διάγραμμα ροπών M_1 (Σχήμα 1.3-5).

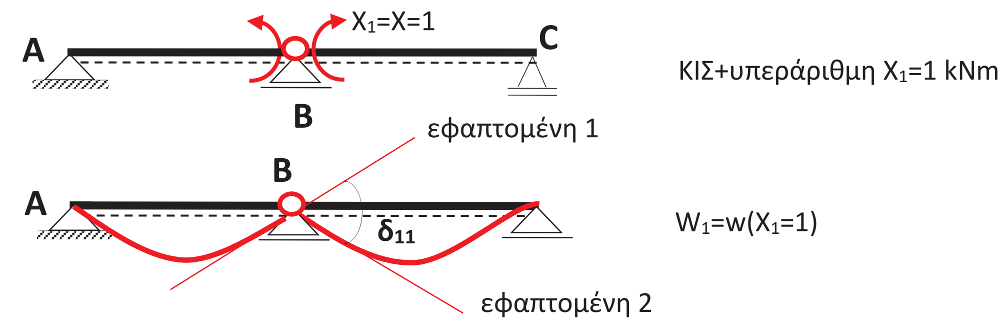


Κύριο Ισοστατικό Σύστημα (ΚΙΣ)

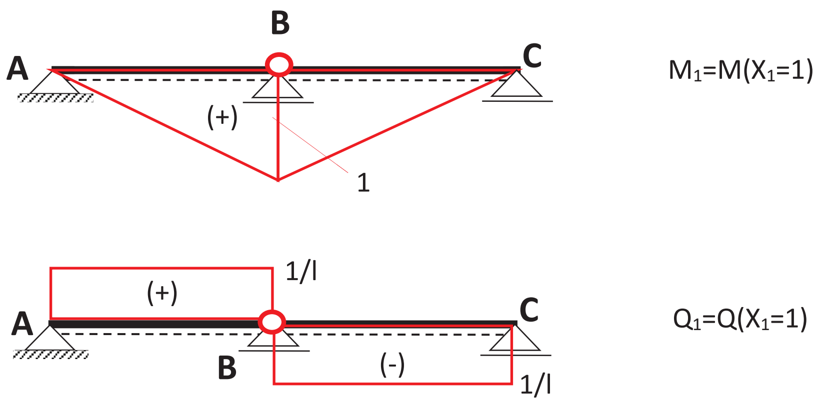
Σχήμα 1.3-3 Επιλογή Κύριου Ισοστατικού Συστήματος (ΚΙΣ)



Σχήμα 1.3-4 Επίλυση ΚΙΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης-κατάστασης 0



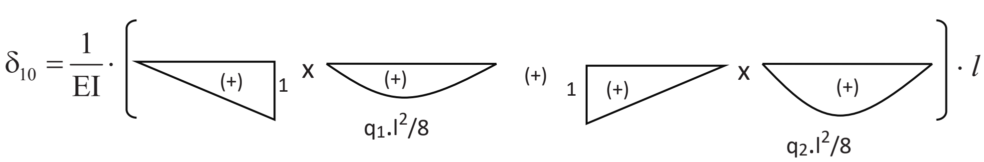
Σχήμα 1.3-5 Επίλυση ΚΙΣ λόγω του υπεράριθμου μεγέθους X_1="1"



Σχήμα 1.3-5 (συνέχ.) Επίλυση ΚΙΣ λόγω του υπεράριθμου μεγέθους X_1="1"

Η αμοιβαία στροφή $\Delta\varphi_{B,0}$ προκύπτει από την παρακάτω σχέση, λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο τα έργα από ροπές κάμψης:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi_{B,0} = \delta_{10} = \int M_0 \cdot M_1 \cdot \frac{dx}{EI}} \text{ (έργα μόνο από ροπές κάμψης) } EA=GF'=\infty \qquad (1.3\text{-}1)$$



$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{q_1\cdot l^2}{8}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{q_2\cdot l^2}{8}\cdot 1\right)\cdot l = \frac{(q_1+q_2)\cdot l^3}{24\cdot EI} \qquad (1.3\text{-}2)$$

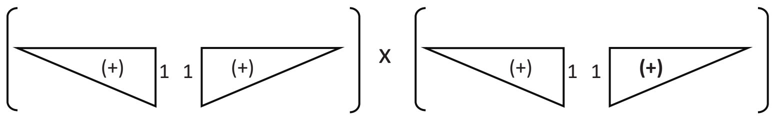
Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων του γινομένου δύο συναρτήσεων (π.χ. του διαγράμματος ροπών M_0 με το διάγραμμα ροπών M_1) χρησιμοποιείται ο σχετικός πίνακας ολοκληρώσεων του Παραρτήματος (Πίνακες Π-5-Π-6).

Το μέγεθος δ_{10} αντιπροσωπεύει μια ασυμβατότητα στο σημείο B του αρχικού φορέα και πρέπει να αρθεί μέσω της επιβολής στο B ενός κατάλληλου στατικού μεγέθους, εργικά αντίστοιχου στη «μετακίνηση» δ_{10}. Το στατικό μέγεθος που ονομάζεται Υπεράριθμο Μέγεθος, στην προκειμένη περίπτωση είναι μια διπλή ροπή X_1=1 kNm.

Φορτίζοντας το ΚΙΣ με τη διπλή ροπή X_1=1 kNm στο B, η προκύπτουσα ελαστική γραμμή (δύο καμπύλες αριστερά και δεξιά της στήριξης B) εμφανίζει γωνία-γόνατο $\Delta\varphi_{B,1}$ στο B που για τις ανάγκες της Μεθόδου Δυνάμεων συμβολίζεται με δ_{11} (Σχήμα 1.3-5). Ο πρώτος δείκτης δηλώνει τη θέση (1) όπου έχει καταλυθεί η δεσμική ράβδος και όπου ασκείται το υπεράριθμο μέγεθος X_1, ο δεύτερος δείκτης (1) παραπέμπει στο αίτιο, στην προκείμενη περίπτωση στη διπλή ροπή X_1=1 kNm). Η αμοιβαία στροφή δ_{11} υπολογίζεται με τη βοήθεια της ΑΔΕ από την παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi_{B,1} = \delta_{11} = \int M_1 \cdot M_1 \cdot \frac{dx}{EI} = \int M_1^2 \cdot \frac{dx}{EI}} = \text{(έργα μόνο από ροπές κάμψης)}\ \ EA=GA'=\infty \qquad (1.3\text{-}3)$$

$\delta_{11} = \dfrac{1}{EI} \cdot$



$\cdot\, l$

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\right) \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EI} \qquad (1.3\text{-}4)$$

1.3.2 Η συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων

Ως γνωστόν, η αρχή της επαλληλίας ισχύει χωρίς περιορισμούς, μόνο στο πλαίσιο της γραμμικής στατικής, δηλαδή στη γραμμική σχέση όλων των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης.

Προκειμένου να ισχύει η αρχή της επαλληλίας, όλα τα στατικά μεγέθη πρέπει να ικανοποιούν τις τρεις βασικές συνθήκες της Στατικής:

1. Τις συνθήκες ισορροπίας μεταξύ των εξωτερικών και εσωτερικών μεγεθών έντασης των επιβαλλόμενων φορτίων και των φορτίων διατομής (M-Q-N) στα δομικά στοιχεία του φορέα και των αντιδράσεων στήριξης.
2. Τις συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων, των εξωτερικών και εσωτερικών μεγεθών παραμόρφωσης.
3. Τις συνθήκες υλικής συμπεριφοράς -τον καταστατικό νόμο του υλικού- που συνδέουν τα φορτία διατομής M-Q-N ενός δομικού στοιχείου με τις παραμορφώσεις.

Στο πλαίσιο της ελαστικής θεωρίας 1ης τάξης βάσει της οποίας συνήθως πραγματοποιούνται οι στατικοί υπολογισμοί, οι συνθήκες συμβιβαστού των μετακινήσεων καταστρώνονται με την παραδοχή ότι οι μετακινήσεις και παραμορφώσεις του φορέα είναι απειροστές (πάρα πολύ μικρές). Η εφαπτομένη μιας γωνίας εξισώνεται με την ίδια τη γωνία (tanφ=φ, cosφ=1, sinφ=0). Επιπλέον, ισχύει ο νόμος του Hooke (η συμπεριφορά των δομικών υλικών και του εδάφους θεμελίωσης θεωρείται γραμμική). Κατά πρώτη προσέγγιση, οι συνθήκες ισορροπίας διατυπώνονται στον α-παραμόρφωτο φορέα.

Οι μετακινήσεις του γραμμικού φορέα (συνακόλουθα και του πραγματικού δρομικού φορέα) πρέπει να είναι συμβατές (συμβιβαστές) με τις εξωτερικές δεσμεύσεις που επιβάλλονται από τις στηρίξεις (γεωμετρικές ή κινηματικές συνοριακές συνθήκες). Στα σημεία που ο φορέας στηρίζεται (εδράζεται) ακλόνητα μέσω μιας πάκτωσης, οι «μετακινήσεις» u, v και φ πρέπει να μηδενίζονται. Επιπλέον και στο εσωτερικό του φορέα οι παραμορφώσεις κάθε στοιχείου πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες συμβιβαστού, δηλαδή να εξασφαλίζουν γεωμετρική συνέχεια, να μην δημιουργούνται χάσματα.

Το άθροισμα όλων των παραμορφώσεων, από την κατάσταση ''0'' και από τις καταστάσεις X_i=1 πολλαπλασιασμένες με τις ζητούμενες τιμές των X_i πρέπει να μηδενίζει τις παραμορφώσεις

δ_m, στα σημεία (m) των καταλυθέντων συνδέσμων.

Επανερχόμενοι στο παράδειγμά μας, η συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων, λόγω συνέχειας της ελαστικής γραμμής στο σημείο B του αρχικού φορέα του παραδείγματος, επιβάλλει τον μηδενισμό της αμοιβαίας στροφής $\Delta\varphi_{,B}$ στη στήριξη B. Η παραμόρφωση δ_{10} που παρουσιάζεται στη στήριξη B του ΚΙΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης δεν υφίσταται στον αρχικό υπερστατικό φορέα και αυτή η ασυμβατότητα πρέπει να αρθεί. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δράση στο ΚΙΣ του υπεράριθμου μεγέθους X_1 το οποίο αν λάβει κατάλληλη τιμή θα προκαλέσει ίση και αντίθετη μετατόπιση, και συγκεκριμένα διαφορά στροφών, στο σημείο B.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, η συνθήκη συμβιβαστού, στην προκειμένη περίπτωση, διατυπώνεται ως εξής:

$$\Delta\varphi_{B,0} + X_1 \cdot \Delta\varphi_{B,1} = 0 \tag{1.3-5}$$

και με συμβολισμούς της Μεθόδου Δυνάμεων:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \tag{1.3-6}$$

απ' όπου προκύπτει το υπεράριθμο μέγεθος X_1:

$$X_1 = M_B = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{(q_1+q_2)}{16} \cdot l^2 \tag{1.3-7}$$

Ο όρος δ_{10} ονομάζεται φορτιστικός συντελεστής (εξαρτάται από το πραγματικό αίτιο-φορτίο που ασκείται στον φορέα). Ο όρος δ_{11} ονομάζεται συντελεστής ενδοσιμότητας.

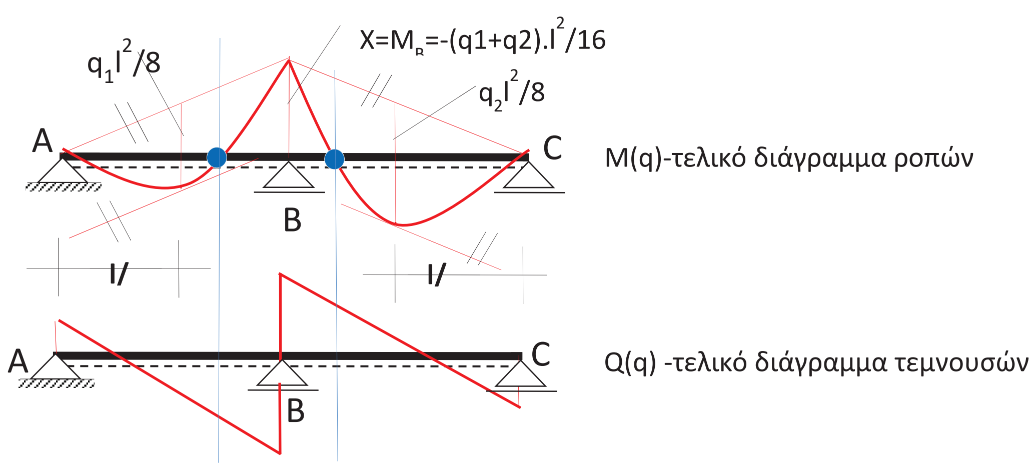
Τα τελικά εντασιακά και παραμορφωσιακά μεγέθη του φορέα προκύπτουν από επαλληλία φορτίσεων ως εξής:

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1 \tag{1.3-8}$$

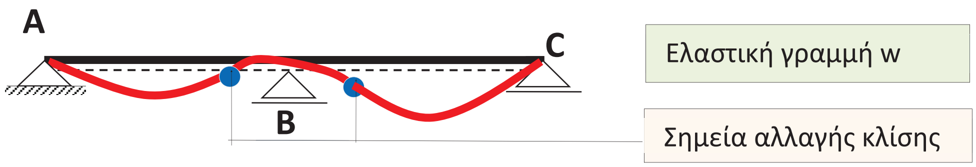
$$Q = Q_0 + X_1 \cdot Q_1 \tag{1.3-9}$$

$$w = w_0 + X_1 \cdot w_1 \tag{1.3-10}$$

Για την καλύτερη κατανόηση της Μεθόδου των Δυνάμεων, περιοριζόμαστε καταρχήν σε ατενείς (EA= →∞) και άτμητους (GA→∞) φορείς όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού από το οποίο αποτελείται ο φορέας, G το μέτρο διάτμησης, I η ροπή αδράνειας της διατομής και A το εμβαδόν της διατομής. Το πλήρες τυπολόγιο της Μεθόδου των Δυνάμεων που περιλαμβάνει και τα έργα από αξονικές δυνάμεις και τέμνουσες παρουσιάζεται στην παράγραφο 6.7.



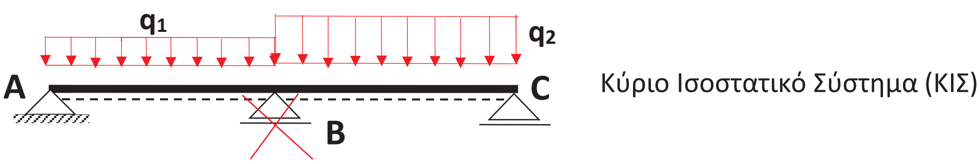
Σχήμα 1.3-6 Τελικά διαγράμματα M, Q και ελαστική γραμμή



Σχήμα 1.3-6 (συνέχ.) Τελικά διαγράμματα M, Q και ελαστική γραμμή

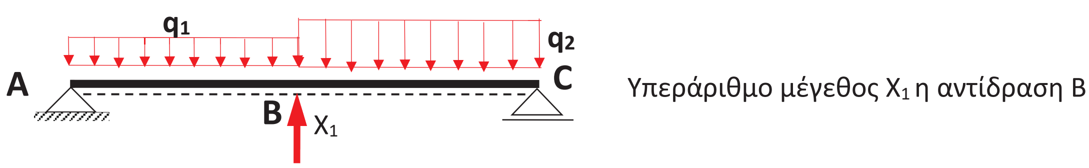
Επιλέγοντας ένα δεύτερο, διαφορετικό Κύριο Ισοστατικό Σύστημα, η διαδικασία επίλυσης είναι παρόμοια, διαφέρουν τα εργικά αντίστοιχα μεγέθη λόγω της επιλογής διαφορετικού υπεράριθμου μεγέθους, το τελικό όμως αποτέλεσμα που θα προκύψει θα είναι το ίδιο.

Επιλογή δεύτερου ΚΙΣ:



Σχήμα 1.3-7 Επιλογή δεύτερου ΚΙΣ

Καταλύουμε τη δεσμική ράβδο που παραλαμβάνει την αντίδραση στην κύλιση B δίχως να διαταράξουμε τη συνέχεια της δοκού, όπως πράξαμε προηγουμένως με την παρεμβολή της άρθρωσης πάνω από το B.



Σχήμα 1.3-8 Νέο ΚΙΣ και νέο υπεράριθμο μέγεθος X_1

Η συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων σ΄ αυτή την περίπτωση, λόγω ύπαρξης της κύλισης στο σημείο B του αρχικού υπερστατικού φορέα, επιβάλλει τον μηδενισμό της κατακόρυφης μετακίνησης στο σημείο της στήριξης B (w_B=0).

Συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων:

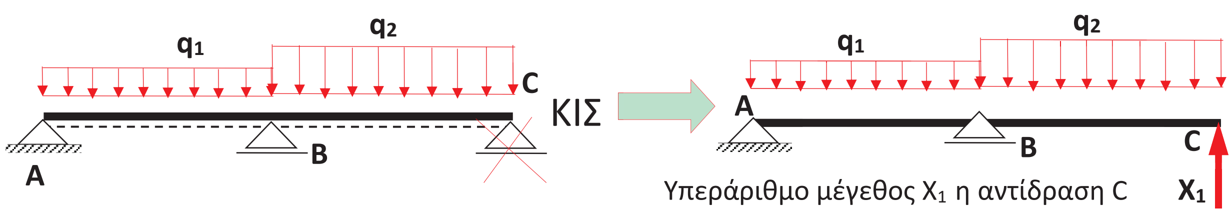
$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \qquad (1.3\text{-}11)$$

όπου X_1 είναι η ζητούμενη αντίδραση στο B, δ_{10} η μετακίνηση στη θέση (1) δηλαδή στο B στο ΚΙΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης q_1, q_2 και δ_{11} η μετακίνηση στη θέση (1) λόγω X_1=1.

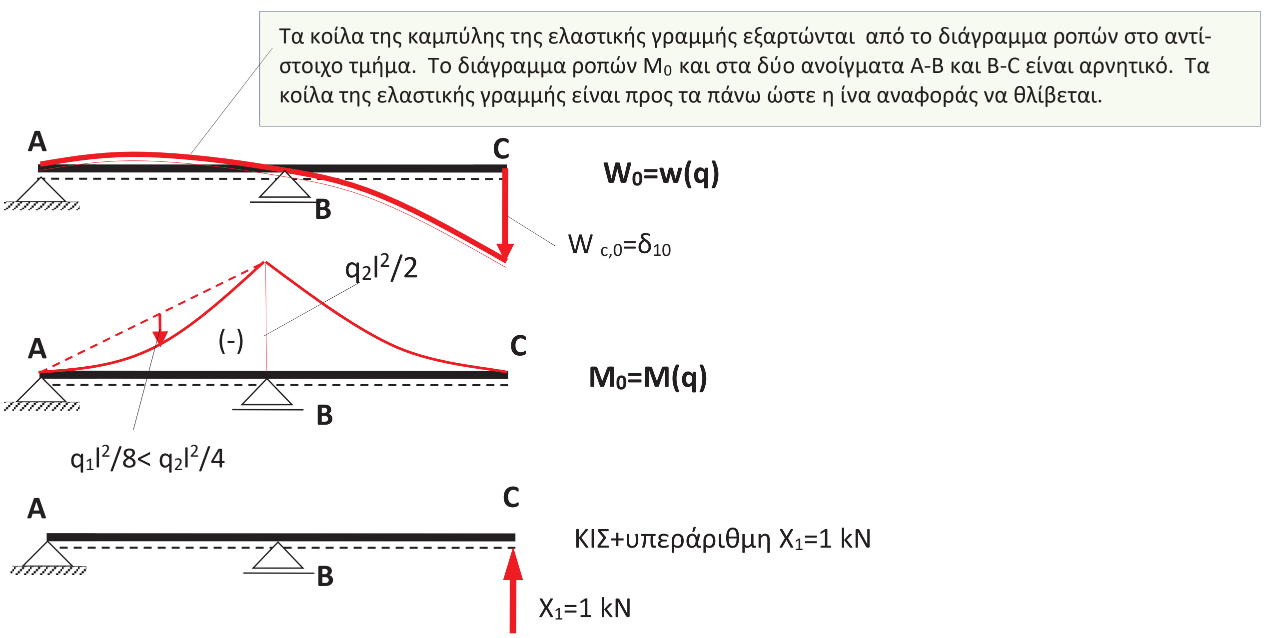
Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το παραπάνω ΚΙΣ δεν είναι το καταλληλότερο διότι οδηγεί σε πιο σύνθετους υπολογισμούς λόγω των διαφορετικών φορτίων q_1 και q_2 που ασκούνται στη δοκό (προκύπτουν πιο σύνθετα διαγράμματα ροπών και η ολοκλήρωσή τους είναι δυσκολότερη).

Επιλογή τρίτου ΚΙΣ:

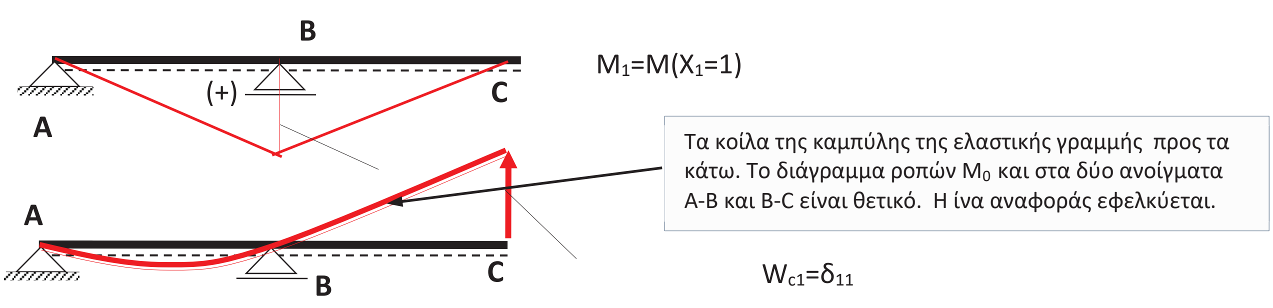
Ως υπεράριθμο μέγεθος σ' αυτή την περίπτωση επιλέγεται η αντίδραση στο C.



Σχήμα 1.3-9 Επιλογή τρίτου ΚΙΣ



Σχήμα 1.3-10 Διαδοχικές επιλύσεις του 3ου ΚΙΣ



Σχήμα 1.3-10 (συνέχ.) Διαδοχικές επιλύσεις του 3ου ΚΙΣ

Η μετακίνηση του σημείου C στο ΚΙΣ λόγω της εξωτερικής φόρτισης q, του σημείου όπου καταλύθηκε η δεσμική ράβδος που παραλαμβάνει την αντίδραση C, υπολογίζεται σύμφωνα με την Αρχή των Δυνατών Έργων (ΑΔΕ) ως εξής:

$$\Delta w_{C,0} = \delta_{10} = \int M_0 \cdot M_1 \cdot \frac{dx}{EI} = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{q_2\cdot l^2}{2}\right)\cdot 1\cdot l\cdot\frac{l}{EI} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{q_2\cdot l^2}{2}\right)\cdot 1\cdot l\cdot\frac{l}{EI} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q_1\cdot l^2}{8}\cdot 1\cdot l\cdot\frac{l}{EI} =$$

$$=-\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{q_2\cdot l^4}{EI}\right)+\frac{1}{24}\cdot\frac{q_1\cdot l^4}{EI}=\frac{l^4}{EI}\cdot\left(\frac{q_1}{24}-\frac{14\cdot q_2}{24}\right)=\frac{l^4}{EI}\cdot\left(\frac{q_1-14\cdot q_2}{24}\right) \quad (1.3\text{-}12)$$

Παρομοίως, η μετακίνηση του σημείου C στο ΚΙΣ, λόγω του υπεραρίθμου μεγέθους X_1=1 kN, υπολογίζεται ως εξής:

$$w_{c,1}=\delta_{11}=\int M_1\cdot M_1\cdot\frac{dx}{EI}=\int M_1^2\cdot\frac{dx}{EI}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot(1\cdot l)^2\cdot\frac{l}{EI}=\frac{2}{3}\cdot\frac{l^3}{EI} \quad (1.3\text{-}13)$$

Η συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων, λόγω ύπαρξης της κύλισης στο σημείο C του αρχικού υπερστατικού φορέα, επιβάλλει τον μηδενισμό της μετακίνησης w_c. Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, η **συνθήκη συμβιβαστού**, στην προκειμένη περίπτωση, διατυπώνεται ως εξής:

$$\delta_{10}+X_1\cdot\delta_{11}=0 \quad (1.3\text{-}14)$$

$$X_1=C=-\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}=-\frac{\frac{l^4}{EI}\cdot\left(\frac{q_1-14\cdot q_2}{24}\right)}{\frac{2}{3}\cdot\frac{l^3}{EI}}=-\frac{1}{16}\cdot(q_1-14\cdot q_2)\cdot l \quad (1.3\text{-}15)$$

Επαλήθευση με σύγκριση του αποτελέσματος από την 1η επίλυση:

$$M_B=M_{B,0}+X_1\cdot M_{B,1}=-\frac{q_2\cdot l^2}{2}-\frac{1}{16}\cdot(q_1-14\cdot q_2)\cdot l\cdot 1\cdot l=-\frac{1}{16}\cdot(q_1+q_2)\cdot l^2 \quad (1.3\text{-}16)$$

1.4 Γενίκευση της Μεθόδου των Δυνάμεων

Η γενικευμένη διαδικασία της Μεθόδου των Δυνάμεων για φορείς με στατική αοριστία (n) περιγράφεται ως ακολούθως:

1. Προσδιορισμός του βαθμού στατικής αοριστίας (n) του φορέα.
2. Μετάβαση με αφαιρετικό τρόπο (επιλογή) σε ένα κατάλληλο κύριο ισοστατικό σύστημα (ΚΙΣ) το οποίο προέρχεται από τον αρχικό φορέα μετά την κατάλυση τόσων δεσμικών ράβδων, όσος είναι και ο βαθμός (n) της στατικής αοριστίας και την εισαγωγή των αντίστοιχων υπεράριθμων μεγεθών X_i (i=1,2 …n).
3. Υπολογισμός των παραμορφώσεων/μετακινήσεων δ_{i0} (συντελεστές φόρτισης) στις θέσεις και στη διεύθυνση των X_i λόγω εξωτερικών δράσεων (εξωτερικών φορτίων ή καταναγκασμών).
4. Υπολογισμός των παραμορφώσεων/μετακινήσεων δ_{ij} (συντελεστές ενδοσιμότητας) στις θέσεις και στη διεύθυνση των X_i λόγω X_j=1 (j = 1, 2, …, n).
5. *Διατύπωση* των συνθηκών συμβιβαστού και επίλυση του συστήματος που προκύπτει (nxn).

$$\delta_i=\delta_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\cdot X_j \qquad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.4\text{-}1)$$

Υπολογισμός των αντιδράσεων, εσωτερικών δυνάμεων και παραμορφώσεων του αρχικού υπερστατικού φορέα με βάση την αρχή της επαλληλίας:

$R=R_0+\sum_{i-1}^{n}R_j\cdot X_j$ Αντιδράσεις (1.4-2)

$S=S_0+\sum_{i-1}^{n}S_j\cdot X_j$ Εντασιακά μεγέθη διατομής (1.4-3)